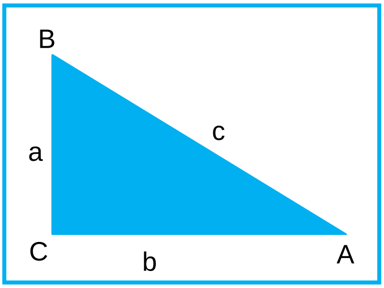
2.3 Identidades trigonométricas.

Las **identidades trigonométricas** son igualdades que involucran funciones trigonométricas. Estas identidades son útiles para cuando necesitamos simplificar expresiones que contengan funciones trigonométricas, cualesquiera que sean los valores que se asignen a los ángulos. Las identidades trigonométricas nos permiten plantear una misma expresión de diferentes formas. Para simplificar expresiones trigonométricas utilizaremos la factorización en conjunto con las identidades trigonométricas.

Si consideramos a un triángulo rectángulo cuyos ángulos son **A**, **B** y **C**, como las longitudes de los lados opuestos a dichos ángulos **a**, **b** y **c**, la hipotenusa se designa como **c** y al ángulo recto como **C**.



Para el ángulo ∢A.

c es la hipotenusa, **a** es el cateto opuesto y **b** es el cateto adyacente.

Para el ángulo ∢B.

c es la hipotenusa, **b** es el cateto opuesto y **a** es el cateto adyacente.

Las funciones trigonométricas se definen como:

$$SenA = \frac{c.o}{h} \quad \xleftrightarrow{\text{Función inversa.}} \quad CscA = \frac{h}{c.o}$$

$$CosA = \frac{c.a}{h} \quad \xleftrightarrow{\text{Función inversa.}} \quad SecA = \frac{h}{c.a}$$

$$TanA = \frac{c.o}{c.a} \quad \xleftrightarrow{\text{Función inversa.}} \quad CotA = \frac{c.a}{c.o}$$

Como las siguientes funciones son recíprocas se tienen las siguientes **identidades trigonométricas** entre ellas.

1 $SenA = \frac{1}{CscA}$	2 $CosA = \frac{1}{SecA}$	3 $TanA = \frac{1}{CotA}$
4 $CscA = \frac{1}{SenA}$	5 $SecA = \frac{1}{CosA}$	6 $CotA = \frac{1}{TanA}$

Identidades del cociente.

Dividiendo el seno entre el coseno se tiene que:

$$\frac{Sen\ A}{CosA} = \frac{\frac{co}{h}}{\frac{ca}{h}} = \frac{(co)(h)}{(ca)(h)} = \frac{co}{ca} = TanA$$

e inversamente, dividiendo el coseno entre el seno se obtiene:

$$\frac{CosA}{SenA} = \frac{\frac{ca}{h}}{\frac{co}{h}} = \frac{(ca)(h)}{(co)(h)} = \frac{ca}{co} = CotA$$

De manera que las siguientes dos fórmulas, llamadas del cociente, son:

7 $$\frac{Sen\ A}{CosA} = TanA$$

8 $$\frac{CosA}{SenA} = CotA$$

Fórmulas de los cuadrados o pitagóricas.

Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$(co)^2 + (ca)^2 = (h)^2$ si dividimos toda la expresión entre $(h)^2$

$\frac{(co)^2}{(h)^2} + \frac{(ca)^2}{(h)^2} = \frac{(h)^2}{(h)^2}$ si lo representamos de la siguiente manera:

$\left(\frac{co}{h}\right)^2 + \left(\frac{ca}{h}\right)^2 = 1$ Finalmente tenemos que:

9 $$Sen^2A + Cos^2A = 1$$

El procedimiento anterior se puede aplicar para el cateto opuesto y obtendremos la siguiente identidad trigonométrica:

10 $$Csc^2A = Cot^2A + 1$$

El procedimiento anterior se puede aplicar para el cateto adyacente y obtendremos la siguiente identidad trigonométrica:

11 $$Sec^2A = Tan^2A + 1$$

Ejemplos resueltos de identidades trigonométricas.

En los siguientes ejercicios comprobar que ambas expresiones son una identidad trigonométrica.

1.- $(SenA)(SecA) = Tan\,A$

aplicando 5

$(SenA)\left(\frac{1}{CosA}\right) = Tan\,A$

$\left(\frac{SenA}{CosA}\right) = Tan\,A$

aplicando 7

$(TanA) = Tan\,A$

2.- $(SenA)(CotA) = CosA$

aplicando 8

$(SenA)\left(\frac{CosA}{SenA}\right) = CosA$

$(\cancel{SenA})\left(\frac{CosA}{\cancel{SenA}}\right) = CosA$

eliminando SenA

$(CosA) = CosA$

3.- $(SecA + 1)(SecA - 1) = Tan^2A$

Aplicamos diferencia de cuadrados esto es:

$(a + b)(a - b) = (a^2 - b^2)$

$(Sec^2A - 1^2) = Tan^2A$

aplicando 10

$(Tan^2A) = Tan^2A$

4.- $Sen^2A + Cos^2A + Tan^2A = Sec^2A$

aplicando 9

$1 + Tan^2A = Sec^2A$

aplicando 10

$Sec^2A = Sec^2A$

5.- $Sen^2A + 3 = 4 - Cos^2A$

aplicando 9

$1 - Cos^2A + 3 = 4 - Cos^2A$

efectuando suma

$4 - Cos^2A = 4 - Cos^2A$

6.- $\frac{TanA}{CotA} = Tan^2A$ *aplicando* 7 *y* 8

$\dfrac{\frac{SenA}{CosA}}{\frac{CosA}{SenA}} = Tan^2A$ *Efectuar multiplicación*

$\frac{Sen^2A}{Cos^2A} = Tan^2A$ *aplicando* 7

$Tan^2A = Tan^2\,A$

7.- $SecA - CosA = (TanA)(SenA)$

aplicando 5

$\frac{1}{CosA} - CosA = (TanA)(SenA)$

resolver como suma de fracciones

$\frac{1 - Cos^2A}{CosA} = (TanA)(SenA)$ *aplicando* 9

$\frac{Sen^2A}{CosA} = (TanA)(SenA)$ *Descomp. Sen²A*

$\frac{SenA}{CosA}(SenA) = (TanA)(SenA)$ apl. 7

$(TanA)(SenA) = (TanA)(SenA)$

8.- $(SecA)(CscA) = TanA + CotA$

5 6 7 8

$\left(\frac{1}{CosA}\right)\left(\frac{1}{SenA}\right) = \frac{SenA}{CosA} + \frac{CosA}{SenA}$ *Resolver fracciones*

$\frac{1}{(SenA)(CosA)} = \frac{Sen^2A + Cos^2A}{(SenA)(CosA)}$ *aplicando* 9

$\frac{1}{(SenA)(CosA)} = \frac{1}{(SenA)(CosA)}$

Ejercicios para resolver en clase.

En los siguientes ejercicios comprobar que ambas expresiones son una identidad trigonométrica.

1.- $(CosA)(CscA) = CotA$	2.- $Cos^2A = \frac{CosA}{SecA}$
3.- $(CosA)(TanA) = SenA$	4.- $(SenA)(SecA) = TanA$
5.- $(1 - CosA)(1 + CosA) = Sen^2A$	6.- $2 - Tan^2A = 3 - Sec^2A$