2.3.2 VÉRTICE, MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA.
2.3.2.1 EL VÉRTICE.

El **vértice** es un punto que forma parte de la parábola, el cual tiene como ordenada el valor mínimo o máximo de la función. En ese punto se puede trazar un eje imaginario que hace simétrica la gráfica de la función, el cual es llamado **eje de simetría**.

El vértice al ser un punto que forma parte de la parábola se representa por medio de una coordenada **V(h, k)**, donde:

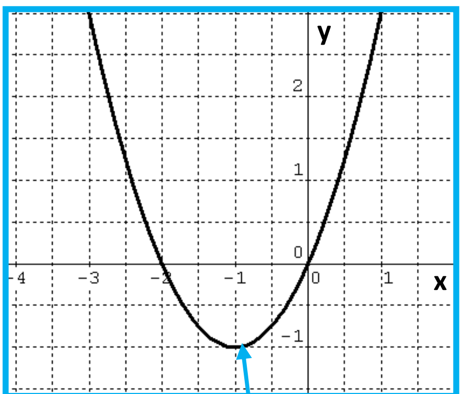
V representa al vértice.

h representa el valor de su abscisa (valor de **x**).

k representa el valor de su ordenada (valor de **f(x)**).

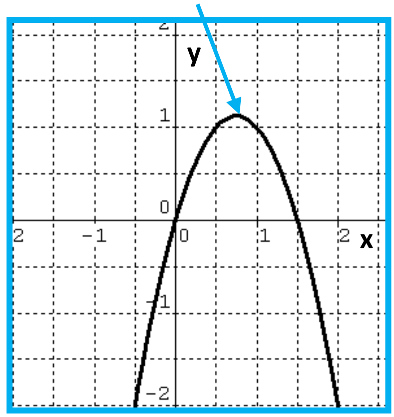
El valor de **h** se puede calcular con la fórmula $h=-\frac{b}{2a}$

El valor de **k** se debe obtener sustituyendo el valor de **h** en la función $k= ax^2+bx+c$.



El vértice, se encuentra en un punto **mínimo** de la función.

El vértice, se encuentra en un punto **máximo** de la función.



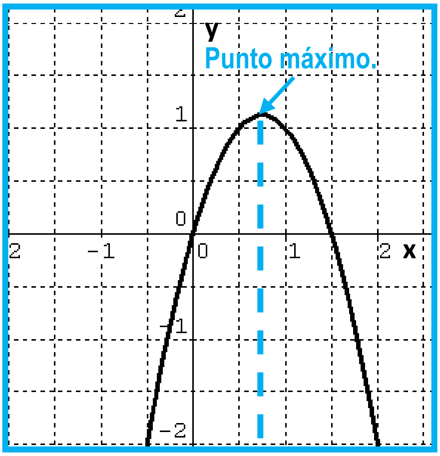
2.3.2.2. MÁXIMOS Y MÍNIMOS EN UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA.

Existe un punto **máximo** en una función cuando la curva pasa de **creciente** a **decreciente**.

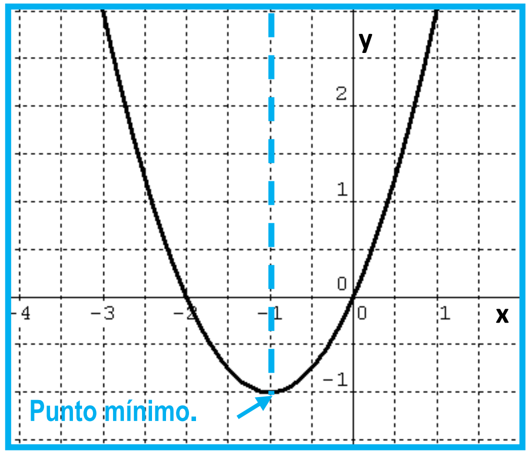
Existe un punto **mínimo** en una función cuando la curva pasa de **decreciente** a **creciente**.

Se dice que **una función es creciente** en un intervalo **I**, si para cada par de valores x_1, x_2 que pertenecen al intervalo **I**, donde $x_1<x_2$, se tiene $f(x_1) < f(x_2)$.

Se dice que **una función es decreciente** en un intervalo **I**, si para cada par de valores x_1, x_2 que pertenecen al intervalo **I**, donde $x_1<x_2$, se tiene $f(x_1)>f(x_2)$.



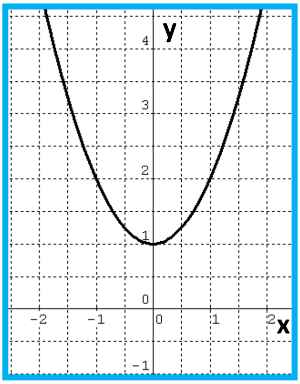
La curva pasa de **creciente** a **decreciente**.



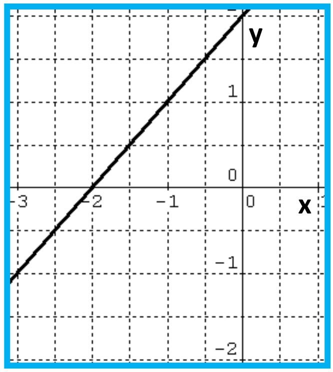
La curva pasa de **decreciente** a **creciente**.

2.3.3 CEROS O RAÍCES DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA.

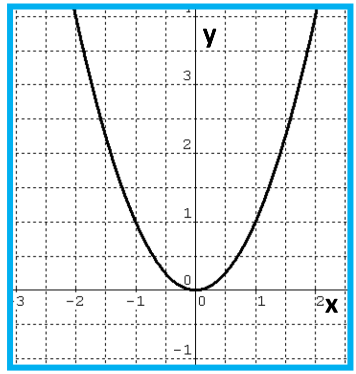
Llamamos **ceros** o **raíz** de una función a los valores de **x** que hacen que la ecuación se haga **cero**. Las raíces representan los puntos en los que la gráfica corta al eje **x**.
Una función puede o no tener raíces.



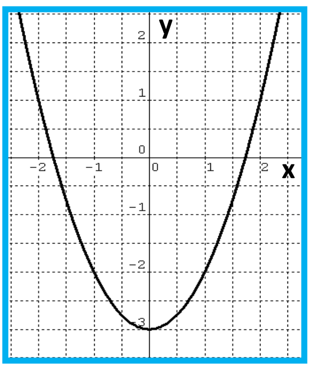
Sin raíz, no corta al eje **x**.



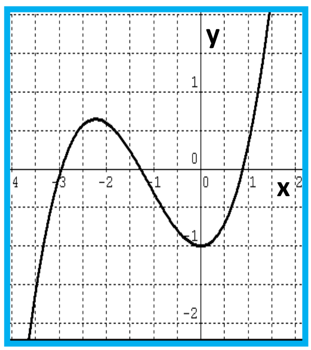
1 raíz, $x=-2$



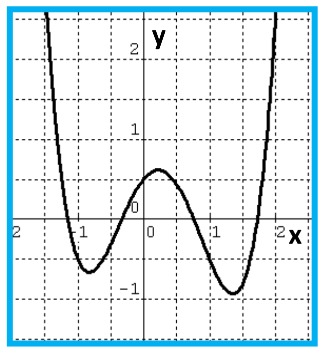
1 raíz, $x=0$



2 raíces; $x_1=-1.73$ y $x_2=1.73$



3 raíces; $x_1=-2.95$, $x_2=-1.2$ y $x_3=0.88$



4 raíces; $x_1= -1.15$, $x_2= -0.33$, $x_3=0.75$ y $x_4=1.72$

Las ecuaciones cuadráticas se clasifican, según los términos que la conforman en:

a) Incompletas. Si en la ecuación $ax^2+bx+c=0$ el valor de **b** y/o **c** son nulos (es cero), entonces, se trata de una ecuación cuadrática incompleta.

Ejemplos: **1)** $x^2=0$ $b=0$ y $c=0$ **2)** $x^2+2x=0$ $c=0$ **3)** $x^2+3=0$ $b=0$

b) Completas. Si en la ecuación $ax^2+bx+c=0$ el valor de **a**, **b** ó **c** son distintos de cero, entonces se trata de una ecuación cuadrática completa.

Ejemplos: **1)** $x^2+2x+4=0$ **2)** $2x^2+x-3=0$ **3)** $3x^2-4x+2=0$

2.3.3.1 RAÍCES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA INCOMPLETA.

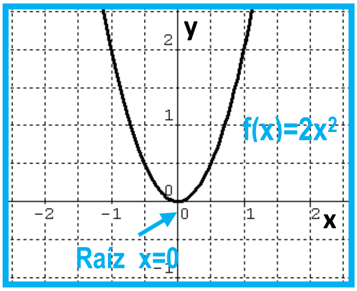
Para obtener las raíces de una **ecuación cuadrática incompleta** tenemos **tres casos**:

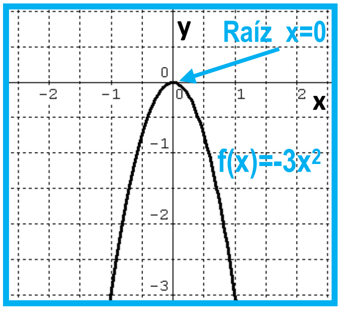
Caso 1. Cuando la ecuación cuadrática tiene la forma $ax^2=0$.

Para que la ecuación se haga cero se requiere buscar un número x^2 que al ser multiplicado por otro distinto a cero (en este caso por a), nos dé como producto cero.

El valor para x^2 que conduce a esto es únicamente el **cero**, así que:

Para cualquier ecuación de la forma $ax^2=0$ tiene como única raíz o solución: $x=0$.
Esto se puede observar gráficamente como a continuación se muestra:





Caso 2. Cuando la ecuación cuadrática tiene la forma $ax^2+bx=0$.

Para encontrar las raíces hay que considerar lo siguiente:

- Como en el primer y segundo término de la ecuación aparece x, se debe factorizar y la ecuación nos queda como: $x(ax+b)=0$.
- El primer miembro de la ecuación tiene dos factores, x y $ax+b$.
- El producto de $(x)(ax+b)$ debe ser igual a cero, para que esto se cumpla es necesario que cualquiera de estos dos factores sea cero, es decir: $x=0$ ó $ax+b=0$

Si $x=0$ la ecuación se satisface y por lo tanto **es una raíz o solución**.

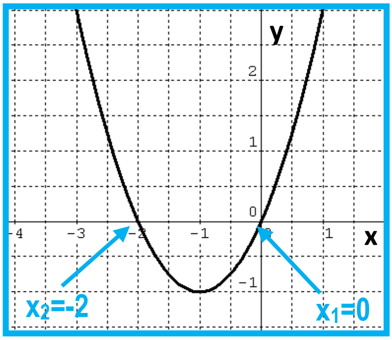
Si $ax+b=0$, la ecuación también se satisface, sólo basta determinar cuál es el valor de x para el que $ax+b=0$.

Este valor se determina despejando x de la expresión $ax+b=0$, quedando despejado de la siguiente manera: $x = -\frac{b}{a}$

Por lo tanto, las raíces de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx=0$ son:

$x_1=0$ y $x_2 = -\frac{b}{a}$

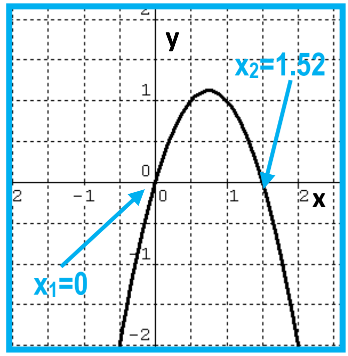
Esto se puede observar gráficamente como a continuación se muestra:



$x^2+2x=0$

$ax^2+bx=0$ Por lo anterior $a=1$ y $b=2$

$x_1=0 \qquad x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{2}{1}=-2$



$-2x^2+3x=0$

$ax^2+bx=0$ Por lo anterior $a=-2$ y $b=3$

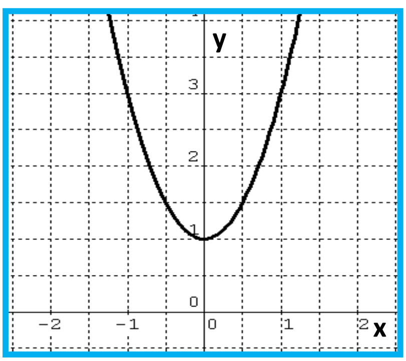
$x_1=0 \qquad x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{-2}=+1.5$

Caso 3. Cuando la ecuación cuadrática tiene la forma $ax^2+c=0$.

Las raíces se obtienen al despejar x de la ecuación $ax^2+c=0$, quedando de la siguiente manera:

$x^2=-\frac{c}{a}$ sacamos raíz cuadrada $x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}}$ $\qquad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ $\qquad$ siempre que $-\frac{c}{a}\geq 0$

Esto se puede observar gráficamente como a continuación se muestra:

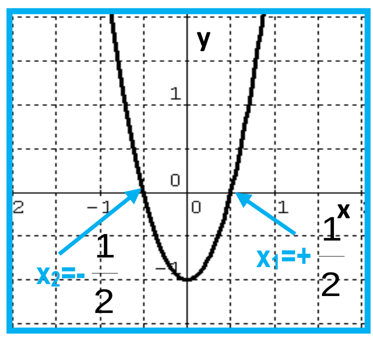


$2x^2+1=0$

$ax^2+c=0$ Por lo anterior $a=2$ y $c=1$

$x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}}=\sqrt{-\frac{1}{2}}$ como $-\frac{c}{a}$ no es ≥ 0

La ecuación no tiene raíces o solución.



$4x^2-1=0$

$ax^2+c=0$ Por lo anterior $a=4$ y $c=-1$

$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}=\pm\sqrt{-\frac{-1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$

$x_1=+\frac{1}{2}$ y $x_2=-\frac{1}{2}$

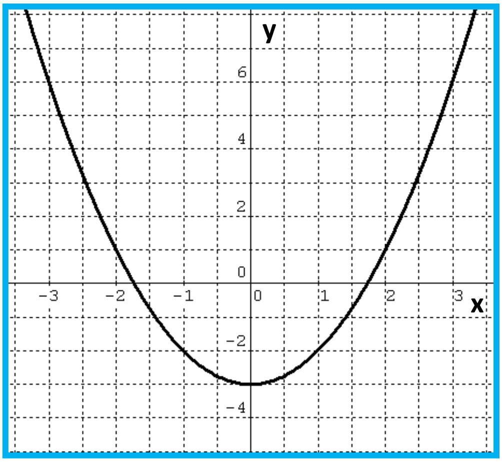
Ejemplos resueltos.

Ejemplo 1.

Construir la gráfica de la siguiente función $f(x)= x^2 -3$, estableciendo su **dominio**, **rango**, las coordenadas de su vértice y sus raíces.

Solución:

x	$f(x)= x^2-3$	(x, f(x))
-3	$(-3)^2-3= 9-3= 6$	(-3 , 6)
-2	$(-2)^2-3= 4-3=1$	(-2 , 1)
-1	$(-1)^2-3= 1-3= -2$	(-1 , -2)
0	$(0)^2-3= 0 -3= -3$	(0 , -3)
1	$(1)^2-3= 1-3= -2$	(1 , -2)
2	$(2)^2-3= 4-3=1$	(2 , 1)
3	$(3)^2-3= 9-3= 6$	(3 , 6)



Dominio: $-\infty \leq x \leq +\infty$

Rango: $y \geq -3$

La ecuación de la función es $x^2 -3=0$, al comparar con la ecuación del tipo $ax^2+c=0$, tenemos que; $a=1$, $b=0$ y $c= -3$.

El vértice $V(h, k)$.

$$h=-\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2(1)}=0$$

Para encontrar $k=x^2 -3$ sustituimos el valor de h, por lo que $k=(0)^2 -3= -3$.

Por lo que las coordenadas del **Vértice** son $(0,-3)$.

Para encontrar sus raíces.

Se trata del caso 3. Cuando la ecuación cuadrática tiene la forma $ax^2+c=0$.

$$x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}}=+\sqrt{-\frac{-3}{1}}=\sqrt{3}=+1.73$$

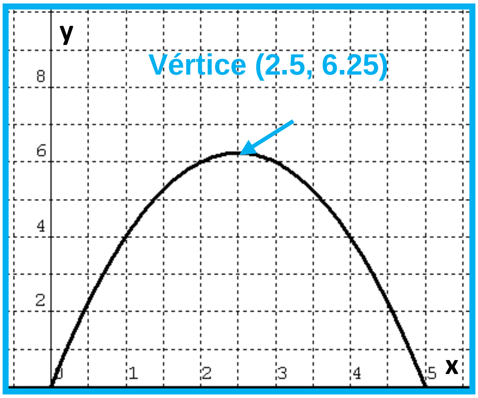
$$x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}=-1.73$$

Recordemos que los valores $x_1=1.73$ y $x_2=-1.73$, son los puntos que satisfacen la ecuación, en la gráfica estos valores representan los puntos donde la curva corta con el eje **x**.

Ejemplo 2.

Un balón de fútbol americano es pateado por un jugador, de manera que la trayectoria descrita por el balón está representada por la función $f(t)= -t^2+5t$, donde **t** es el tiempo de vuelo en segundos. Elabora la gráfica de la función $f(t)= -t^2+5t$, estableciendo su **dominio**, **rango**, punto máximo que alcanza el balón y los puntos donde se pateó y cayó el balón.

t	$f(t)= -t^2+5t$	(t , f(t))
-2	$-(-2)^2 + 5(-2)= -4-10= -14$	(-2,-14)
-1	$-(-1)^2 + 5(-1)= -1-5= - 6$	(-1 , -6)
0	$-(0)^2 + 5(0)= 0$	(0 , 0)
1	$-(1)^2 + 5(1)= -1+5= 4$	(1 , 4)
2	$-(2)^2 + 5(2)= -4+10= 6$	(2 , 6)
4	$-(4)^2 + 5(4)= -16+20= 4$	(4 , 4)
5	$-(5)^2 + 5(5)= -25+25= 0$	(5 , 0)



Dominio: $0 \le x \le 5$

Rango: $0 \le y \le 6.25$

La ecuación de la función es $-t^2+5t=0$, al comparar con la ecuación del tipo $ax^2+bx=0$, tenemos que; $a=-1$, $b=5$ y $c=0$.

El vértice $V(h, k)$.

$$h= -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2(-1)} = \frac{5}{2} = 2.5$$

Donde **t** es el tiempo, en este caso el tiempo transcurrido para lograr la máxima altura **(k)**.

Para encontrar $k=ax^2+bx$, en nuestro caso $k=-t^2+5t$ sustituimos el valor de **t**, por lo que $k=-(2.5)^2+5(2.5)$.

$k=-6.25+12.5= 6.25$

El **Vértice** es **(2.5, 6.25)**, el punto máximo se encuentre en el vértice de la función.

Los puntos donde se pateó y cayó el balón representan las **raíces de la ecuación**.

Se trata del **caso 2**. Cuando la ecuación cuadrática tiene la forma $ax^2+bx=0$

$x_1=0$ es el punto donde se pateó el balón.

$x_2= -\frac{b}{a} = -\frac{5}{-1} = 5$ Es el punto donde cayó el balón.

Podemos observar los resultados en la gráfica anterior.

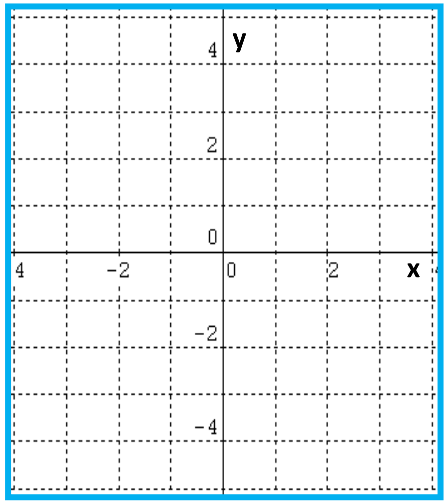
Ejercicios para resolver en clase.

Ejercicio 1.

Construir la gráfica de la función $f(x)= -x^2+4$, estableciendo su **dominio**, **rango**, las coordenadas de su vértice y sus raíces.

Solución:

x	$f(x)= -x^2+4$	(x, f(x))
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		



Dominio:

Rango:

De la función $f(x)= -x^2+4$, tenemos que:

a= **b=** **c=**

El vértice **V(h, k)**.

$h= -\frac{b}{2a} =$

$k=-x^2+4$

Para encontrar sus raíces.

Se trata del **caso 3.** Cuando la ecuación cuadrática tiene la forma $ax^2+c=0$

$x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}} =$

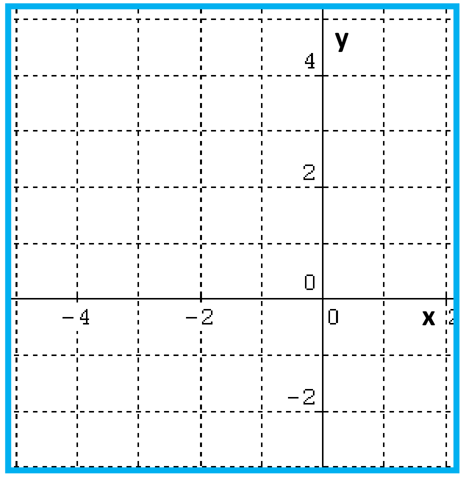
$x_2= -\sqrt{-\frac{c}{a}} =$

Ejercicio 2.

Construir la gráfica de la función $f(x)= x^2 +3x$, estableciendo su **dominio**, **rango**, las coordenadas de su vértice y sus raíces.

Solución:

x	$f(x)= x^2+3x$	(x, f(x))
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		



Dominio:

Rango:

De la función $f(x)= x^2 +3x$, tenemos que:

a= **b=** **c=**

El vértice **V(h, k)**.

$h= -\frac{b}{2a}$

$k= x^2 +3x$

Para encontrar sus raíces.

Se trata del **caso 2.** Cuando la ecuación cuadrática tiene la forma $ax^2+bx=0$

$x_1=0$

$x_2= -\frac{b}{a} =$