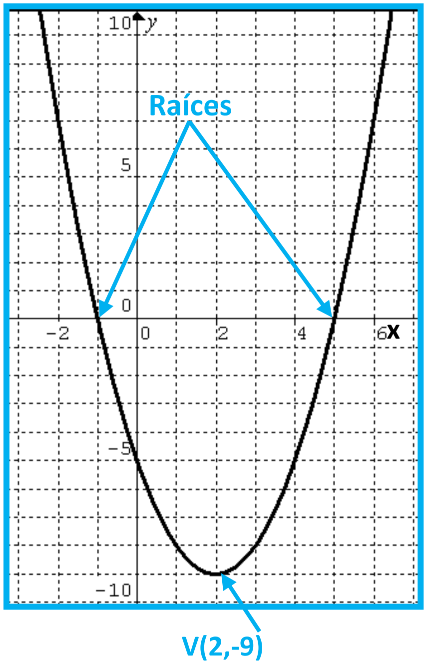
2.3.4 GRÁFICAS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS COMPLETAS.

Ejemplo 1. Construir la gráfica de la siguiente función $f(x)= x^2-4x-5$, estableciendo su dominio, rango, las coordenadas de su vértice y sus raíces (método de factorización).

Solución:

x	$f(x)= x^2-4x-5$	(x, f(x))
-2	$=(-2)^2-4(-2)-5=4+8-5=7$	(-2 , 7)
-1	$=(-1)^2-4(-1)-5=1+4-5=0$	(-1 , 0)
0	$=(0)^2-4(0)-5=-5=$	(0 , -5)
2	$=(2)^2-4(2)-5=4-8-5=-9$	(2 , -9)
4	$=(4)^2-4(4)-5=16-16-5=-5$	(4 , -5)
6	$=(6)^2-4(6)-5=36-24-5=7$	(6 , 7)



Dominio: $-\infty \leq x \leq +\infty$

Rango: $y \geq -9$

De la función $f(x)=x^2-4x-5$ tenemos que:

$a= 1$ $b= -4$ $c=-5$

El vértice $V(h, k)$. $h=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2(1)}=2$

Para encontrar el valor de k sustituimos el valor de h en la función inicial.

h=x	$k= x^2-4x-5$	(h, k)
2	$=(2)^2-4(2)-5=4-8-5=-9$	(2 , -9)

V(2 , -9)

Para encontrar sus raíces.

$x^2-4x-5=0$ la descomponemos en dos binomios.

$(x-\quad)(x+\quad)=0$ ahora buscamos dos números que restados den 4 y multiplicados den 5.

$(x- 5)(x+ 1)=0$, los números buscados son 5 y 1, por lo que las raíces de la ecuación son:

$x_1=5$ y $x_2=-1$

El valor del vértice y las raíces se pueden observar en la gráfica anterior.

Ejemplo 2. En un terreno rectangular se sabe que la medida de su largo es 7m más que la medida de su ancho, si su área es de $120m^2$, determinar:

a) La función que relaciona la medida de su ancho (x) y la medida de su área (y).

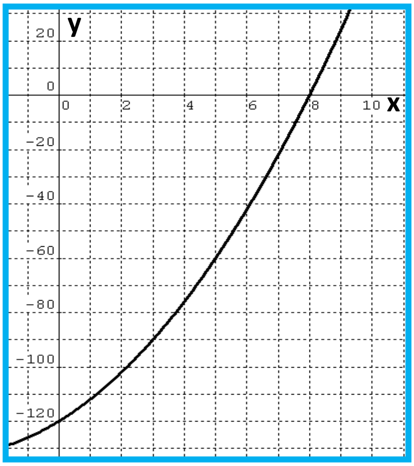
b) Determinar su área cuando su ancho mide 1, 3, 6, 8, ó 9 m.

c) Construir la gráfica que muestre en el eje **x** la medida de su ancho y en el eje **y** la medida de área.

d) Determinar las medidas del ancho y el largo del terreno, para ello encuentre las raíces por el método del **TCP**.

Si llamamos al ancho **x** y al largo **x+7**, el área del terreno se representa por la función: A=(largo)(ancho), entonces A=(x+7)(x), como el área es $120cm^2$ $120= x^2+7x$ **$f(x)= x^2+7x-120$**

x	$f(x)= x^2+7x-120$	(x, f(x))
1	$(1)^2+7(1)-120=1+7-120=-112$	(1, -112)
3	$(3)^2+7(3)-120=9+21-120=-90$	(3 , -90)
6	$(6)^2+7(6)-120=36+42-120=-42$	(6 , -42)
8	$(8)^2+7(8)-120=64+56-120=0$	(8 , 0)
9	$(9)^2+7(9)-120=81+63-120=24$	(9 , 24)



Dada la ecuación $f(x)=x^2+7x-120$ encontrar sus raíces.

Primeramente, igualamos la ecuación a cero.

$x^2+7x-120=0$

Factorizamos el coeficiente de **x^2** y de **x**, pasamos el término independiente del lado derecho de la igualdad, quedando de la siguiente manera: $x^2+7x=120$

En el lado izquierdo de la igualdad, deberemos de sumar un número para **completar el trinomio cuadrado perfecto**, dicho número se obtiene de dividir el segundo término del trinomio entre 2 y el resultado elevarlo al cuadrado.

Esto lo podemos analizar en la siguiente hoja.

$(x^2+7x+\frac{49}{4})=120+\frac{49}{4}$ Factorizando el trinomio tenemos que:

$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{529}{4}$ Para encontrar las raíces de la ecuación despejamos **x**.

$$x+\frac{7}{2}=\sqrt{\frac{529}{4}}$$

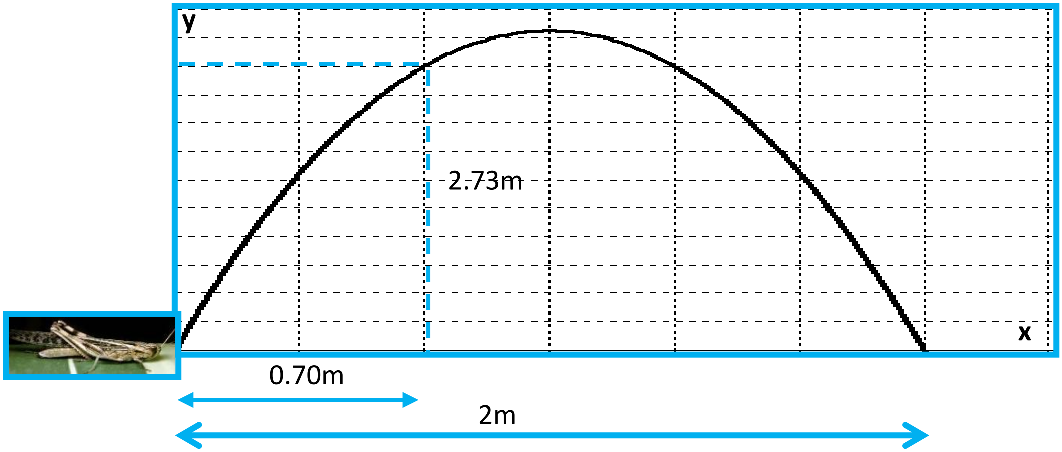
$$x=-\frac{7}{2}\pm\frac{23}{2}$$

x_1 $=\frac{-7}{2}+\frac{23}{2}=\frac{16}{2}=8$ entonces **$X_1=8$** y **x_2**$=\frac{-7}{2}-\frac{23}{2}=-\frac{30}{2}=-15$ entonces **$X_2=-15$**

La medida del ancho del terreno puede ser alguno de los valores de las raíces, pero **$X_2=-15$** y la medida del ancho no puede ser un número negativo, por lo tanto el ancho del terreno es **$X_1=8m$** y su largo es de x+7, entonces el largo es 8+7= 15 m.

Largo=8m **Ancho=15m**

Ejemplo 3. Un **salta montes** da un brinco y cae a 2 m. de su posición inicial, cuando estaba a 0,70 m. del lugar donde inició el salto, estaba a 2,73 m. del suelo. ¿Si su salto forma una parábola, cuál es la ecuación? ¿Cuál fue el punto más alto que alcanzó?



Para resolverlo contamos con las raíces y con un punto que forma parte de la parábola.

Raíces (**0**,0) y (**2**,0) x_1=**0** x_2=**2**

El punto (0.70, 2.73).

Considerando las propiedades de las raíces de una función cuadrática, tenemos que:

En toda ecuación de segundo grado en la que el coeficiente del primer término es 1, la suma de sus raíces es igual al coeficiente del segundo término con el signo cambiado y el producto de sus raíces es igual al tercer término con su propio signo.

$X_1+X_2=0+2=2$, **este es igual al cociente del segundo término de la ecuación con el signo cambiado, partido por el cociente del primer término.**

$(X_1)(X_2)=(0)(2)=0$, **este es igual al tercer término de la ecuación con su propio signo, partido por el coeficiente del primero.**

Por lo que la ecuación que obtenemos es $x^2-2x+0=0$ ó $x^2-2x=0$

$x^2-2x=0$ si **a=1**, pero si **a≠1** entonces multiplicamos la ecuación por **a**.

$\mathbf{a}x^2-2\mathbf{a}x=0$ factorizamos **a**.

$\mathbf{a}(x^2-2x)=0$, la altura **y** en función de la distancia **x** recorrida quedaría.

$y=\mathbf{a}(x^2-2x)$

Para conocer cuál es el valor de **a** sustituimos el valor de **x** y el valor de **y** del punto conocido, en la ecuación $y=\mathbf{a}(x^2-2x)$.

El punto es (0.70, 2.73), donde **x=0.70** y **y=2.73**.

$y=\mathbf{a}(x^2-2x)$

$2.73=a(0.70^2-2(0.70))$

$2.73=a(0.49-1.4)$

$2.73=a(-0.91)$

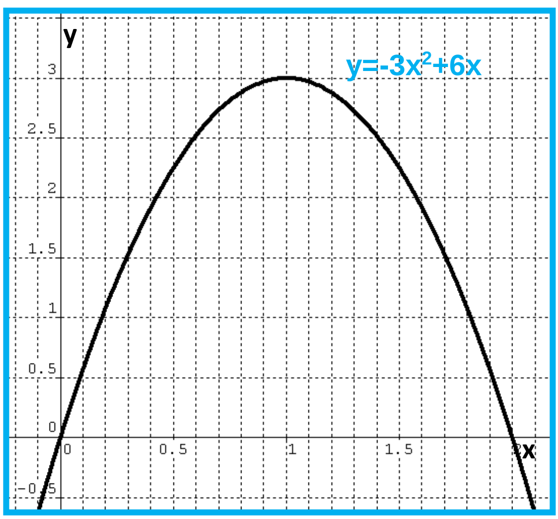
$a=\dfrac{2.73}{-0.91}=-3$

Por lo que la ecuación es:

$\mathbf{y=ax^2-2ax}$, pero a=-3, entonces:

$y=-3x^2-2(-3)x$

$\mathbf{y=-3x^2+6x}$

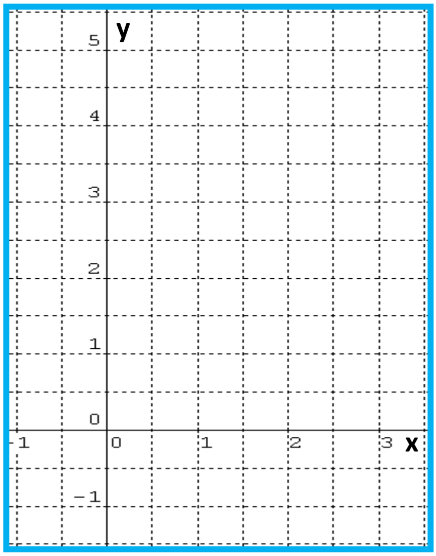


Ejercicios para resolver en clase.

Ejercicio 1. Construir la gráfica de la siguiente función $f(x)= 2x^2-5x+2$, estableciendo su dominio, rango, las coordenadas de su vértice y sus raíces (por fórmula general).

Solución:

x	$f(x)= 2x^2-5x+2$	(x, f(x))
-0.5		
0		
1		
1.5		
2		
3		



Dominio:

Rango:

De la función $f(x)= 2x^2-5x+2$ tenemos que:

a= **b=** **c=**

El vértice V(h, k).

$$h=x=-\frac{b}{2a}=$$

Para encontrar el valor de k sustituimos el valor de h en la función inicial.

h=x	$k= 2x^2-5x+2$	(h, k)

Por lo tanto el vértice tiene las coordenadas V(,)

Para encontrar sus raíces.

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$X_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejercicio 2. El producto de dos números pares consecutivos es de 120, si al primer número le llamamos **x** y al segundo número par consecutivo le llamamos **x+2**.

Determinar:

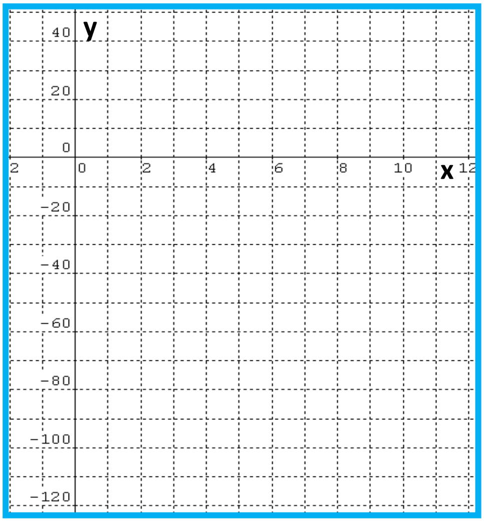
a) La función que relacione el valor de estos números con el resultado de su producto.

b) Elabore la gráfica para valores de **x** iguales o mayores que cero.

c) Determine el **dominio** y el **rango** de la función.

d) ¿Cuál es el valor de estos números pares consecutivos cuyo producto es 120? Considere que el valor de uno de estos números es el valor de una de las raíces.

x	f(x)=	(x, f(x))
0		( )
2		( )
4		( )
6		( )
8		( )
10		( )
12		( )



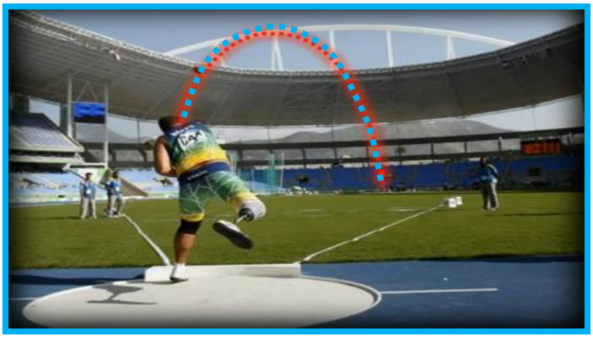
Dominio: **Rango:**

Para sus raíces se recomienda el método de factorización.

x_1= **x_2=**

Por lo que los números pares consecutivos son: _________ y ________.

Ejercicio 3. Un atleta lanza una pelota hacia arriba, desde una altura de 2 m. sobre el suelo. La altura que alcanza la pelota, medida desde el suelo en metros, en función del tiempo medido en segundos, se calcula a través de la siguiente fórmula: **$h(t) = -t^2 + 4t + 2$**.



a) ¿Cuál es la **altura máxima** que alcanza la pelota y en qué momento lo hace?
Para hallar esto tenemos que determinar el vértice y sus respectivas coordenadas **v= (h, k)**, en el vértice **h** = el tiempo en que alcanza la altura máxima y **k** = la altura máxima.

El vértice **V(h, k)**.

$h = -\dfrac{b}{2a} =$

Para encontrar el valor de k sustituimos el valor de h en la función inicial, por lo que k:

h=x	$k=-t^2+4t+2$	(h, k)

Por lo que las coordenadas del vértice son **V(   )**.

b) ¿Después de cuánto tiempo de haber sido lanzada la pelota, ésta cae al suelo?
Lo que tenemos que averiguar es una de las raíces de la parábola, ya que el movimiento empieza en t=0 encima del atleta y termina en el suelo, dicho de otra forma, empieza en el eje **x** y termina en el eje **x** (raíces).
Para encontrar las raíces utiliza el **método de la fórmula general**.

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad X_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$