2.4.4 GRÁFICAS DE FUNCIONES POLINOMIALES.

Ejemplos resueltos.

Ejemplo 1.

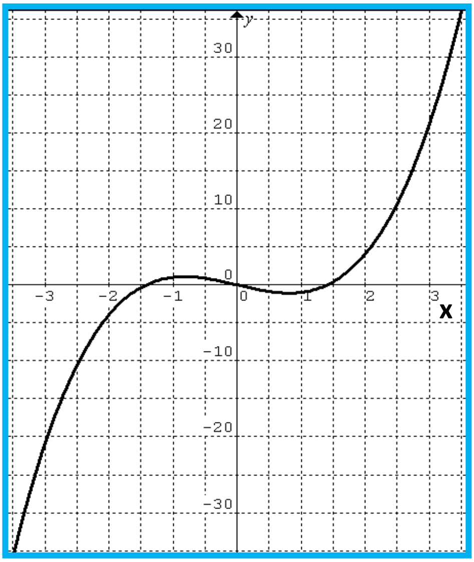
Construir la gráfica de la siguiente función **$f(x) = x^3-2x$**, para cualquier valor de **x** positivo o negativo, establecer su **dominio**, su **rango** y encontrar sus raíces.

Solución:

x	$f(x) = x^3-2x$	(x, f(x))
-3	(-3)(-3)(-3) -2(-3)= -27+6= -21	(-3 , -21)
-2	(-2)(-2)(-2) -2(-2)= -8+4= -4	(-2 , -4)
-1	(-1)(-1)(-1) -2(-1)= -1+2= 1	(-1,1)
0	(0)(0)(0) -2(0)= 0+0= 0	(0 , 0)
1	(1)(1)(1) -2(1)= 1-2= -1	(1 , -1)
2	(2)(2)(2) -2(2)= 8-4= 4	(2 , 4)
3	(3)(3)(3) -2(3)= 27-6= 21	(3 , 21)

Dominio: $-\infty \leq x \leq +\infty$

Rango: $-\infty \leq y \leq +\infty$



Para encontrar las raíces aplicaremos el método de factorización.

En la ecuación **$f(x)= x^3-2x$** la igualamos a cero y nos queda.

$x^3-2x=0$ sacamos a **x** como factor común, quedando: $x(x^2-2)=0$.

Las raíces son los valores que podemos asignar a **x** para que la ecuación se haga cero, por lo que:

$x_1=0$, **$x_2=+\sqrt{2}$** y **$x_3=-\sqrt{2}$**

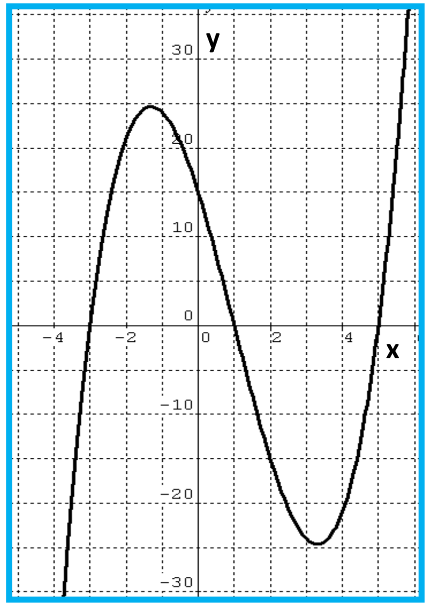
Los valores de las raíces se pueden observar en la gráfica.

Ejemplo 2.

Construir la gráfica de la siguiente función **$f(x) = x^3-3x^2-13x+15$**, para cualquier valor de **x** positivo o negativo, establecer su **dominio**, su **rango** y encontrar sus raíces.

Solución:

x	$y=f(x) = x^3-3x^2-13x+15$	(x, f(x))
-3	$(-3)^3 -3(-3)^2-13(-3)+15=-27-27+39+15=0$	(-3 , 0)
-2	$(-2)^3 -3(-2)^2-13(-2)+15=-8-12+26+15=21$	(-2 , 21)
-1	$(-1)^3 -3(-1)^2-13(-1)+15=-1-3+13+15=24$	(-1 , 24)
0	$(0)^3 -3(0)^2-13(0)+15=+15$	(0 , 15)
1	$(1)^3 -3(1)^2-13(1)+15=1-3-13+15=0$	(1, 0)
2	$(2)^3 -3(2)^2-13(2)+15=8-12-26+15=15$	(2 , 15)
3	$(3)^3 -3(3)^2-13(3)+15=27-27-39+15=-24$	(3 , -24)



Dominio: $-\infty \leq x \leq +\infty$

Rango: $-\infty \leq y \leq +\infty$

Para encontrar las **raíces** utilizaremos el **método de división sintética**, por lo que habrá que factorizar la siguiente expresión **$x^3-3x^2-13x+15$**.

Por lo que los posibles valores de **a** son: $\pm 1, \ \pm 3, \ \pm 5, \ \pm 15$.

Si suponemos que **a=-3.**

x^3	$-3x^2$	$-13x$	$+15$		
1	-3	-13	+15		(x-a)
	1x-3= -3	-6x-3= 18	5x-3= -15	a=-3	x-(-3)=x+3
1	-6	5	0		

El polinomio $x^3-3x^2-13x+15$ se puede representar como **$(x^2-6x+5)(x+3)$**, pero x^2-6x+5 lo podemos factorizar como se vio en el bloque 2, entonces $x^2-6x+5=(x- 5)(x- 1)$ y el polinomio **$x^3-3x^2-13x+15=(x- 5)(x- 1) (x+3)=0$**, por lo que sus raíces son:

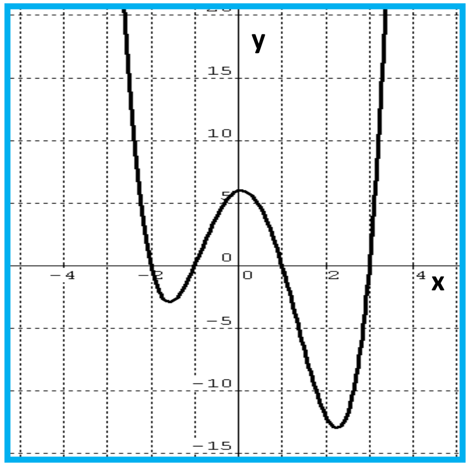
$x_1=5$, **$x_2=1$** y **$x_3=-3$**

Ejemplo 3.

Construir la gráfica de la siguiente función $f(x) = x^4-x^3-7x^2+x+6$, para cualquier valor de x positivo o negativo, establecer su **dominio**, su **rango** y encontrar sus raíces.

Solución:

x	$f(x) = x^4-x^3-7x^2+x+6$	$(x , f(x))$
-3	$(-3)^4-(-3)^3-7(-3)^2+(-3)+6=48$	(-3 ,48)
-2	$(-2)^4-(-2)^3-7(-2)^2+(-2)+6=0$	(-2 , 0)
-1	$(-1)^4-(-1)^3-7(-1)^2+(-1)+6=0$	(-1, 0)
0	$(0)^4-(0)^3-7(0)^2+(0)+6=6$	(0 , 6)
1	$(1)^4-(1)^3-7(1)^2+(1)+6=0$	(1, 0)
2	$(2)^4-(2)^3-7(2)^2+(2)+6=-12$	(2 , -12)
3	$(3)^4-(3)^3-7(3)^2+(3)+6=0$	(3 , 0)



Dominio: $-\infty \le x \le +\infty$

Rango: $y \ge -12.94$

Para encontrar las raíces utilizaremos el **método de la división sintética**, por lo que habrá que factorizar la siguiente expresión $x^4-x^3-7x^2+x+6$.

Por lo que los posibles valores de a son: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$.

Si suponemos que $a=1$

x^4	$-x^3$	$-7x^2$	$+x$	$+6$		
1	-1	-7	1	+6		x-a
	1x1=1	0x1=0	-7x1= -7	-6x1= -6	**a=1**	x-1
1	0	-7	-6	**0**		

El polinomio $x^4-x^3-7x^2+x+6$, se puede representar como $(x^3-7x-6)(x-1)$, pero x^3-7x-6 lo podemos **factorizar nuevamente** por división sintética.

x^3	$0x^2$	$-7x$	-6		
1	0	-7	-6		x-a
	1x-2=-2	-2x-2= 4	-3x-2= 6	**a=-2**	x-(-2)=x+2
1	-2	-3	**0**		

Entonces el polinomio $x^4-x^3-7x^2+x+6$, se puede representar como $(x^2-2x-3)(x+2)(x-1)$, pero aun nos falta factorizar el polinomio $x^2-2x-3=(x - 3)(x + 1)$, por lo que el polinomio $x^4-x^3-7x^2+x+6=(x-3)(x+1)(x+2)(x-1)=0$.

Las raíces de ésta función son los valores de x que hacen que la ecuación sea cero.

$x_1=3$, $x_2=-1$, $x_3=-2$ y $x_4=1$

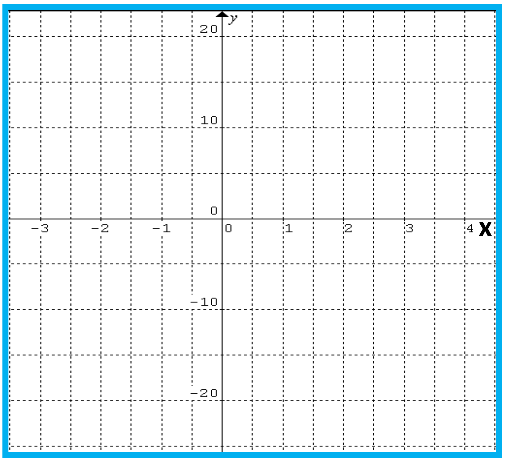
Ejercicios para resolver en clase.

Ejercicio 1.

Construir la gráfica de la siguiente función **$f(x) = x^3-2x^2-5x+6$**, para cualquier valor de **x** positivo o negativo, establecer su **dominio**, su **rango** y encontrar sus raíces.

Solución:

x	$f(x) = x^3-2x^2-5x+6$	(x, f(x))
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		



Dominio:

Rango:

Para encontrar las **raíces** utilizaremos el método de **división sintética** y la **factorización** de una ecuación cuadrática.

Las raíces son **x_1=** **x_2=** y **x_3=**

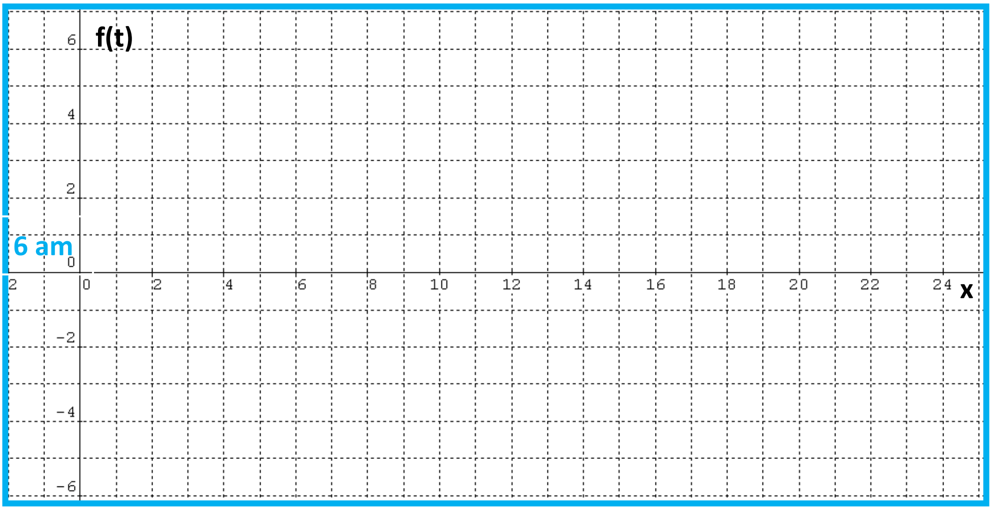
Ejercicio 2.

Un meteorólogo determina que la temperatura ambiente, T, en °F, en cierto período de 24 horas en invierno, estuvo representada por **$T = 1/20(t)(t-12)(t-24)$** para 0 horas<t<24horas, donde **t** es el tiempo; **t** = 0 corresponde a las 6 a.m. Realice lo siguiente:

a) Llene la tabla y trace la gráfica correspondiente.

Solución:

x=t	f(t)= 1/20(t)(t-12)(t-24)	(t, f(t))
0		
3		
5		
8		
12		
15		
19		
22		
24		



b) ¿En qué horario las temperaturas fueron mayores a cero °F?

c) ¿En qué horario las temperaturas fueron menores a cero °F?

d) ¿Aproximadamente a qué hora se registró la mayor temperatura y de cuántos grados ° F fue?

Nota:

Si deseas saber el valor exacto de la **máxima temperatura**, elabora la gráfica en el simulador **Graphmatica**.