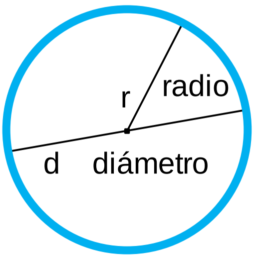
3.3.6 Perímetro en la circunferencia y área en el círculo.

Perímetro de la circunferencia. Es la longitud (L) de la circunferencia, se calcula con las siguientes fórmulas.



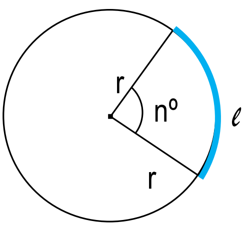
$L = \pi\ d$

Pero $d = 2\ r$, entonces

$$\boxed{L = 2\pi r}$$

Ecuación para calcular el perímetro de una circunferencia.

Longitud de un arco de una circunferencia de nº (n grados).



Si $L = 2\ \pi\ r$ es la longitud de la circunferencia (360º).

La longitud del arco de $1^{o} = \dfrac{(2)(\pi)(r)}{360^{o}}$

En la circunferencia la longitud *l* de un arco de nº es:

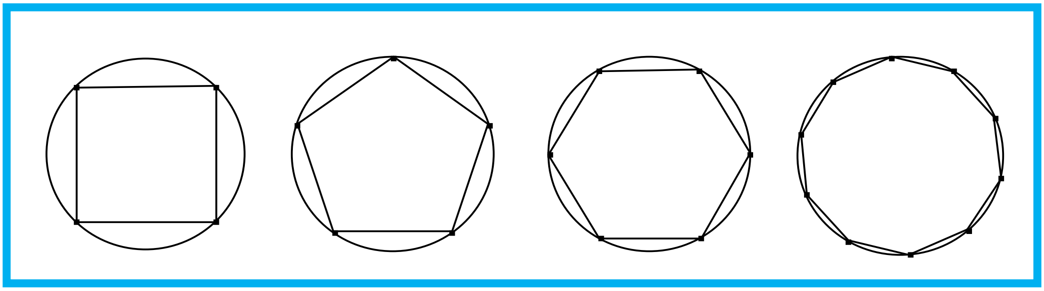
$\ell = \dfrac{(2)(\pi)(r)(n^{o})}{360^{o}}$ Simplificamos y tenemos

$$\boxed{\ell = \frac{(\pi)(r)(n^{o})}{180^{o}}}$$

Ecuación para calcular la longitud del arco de una circunferencia.

ÁREA DEL CÍRCULO.

Si observamos las siguientes figuras, se nota que a medida que se incrementa el número de lados del polígono regular su área se aproxima al área del círculo.



La sucesión de polígonos cada vez con mayor número de lados se acerca al área del círculo, el perímetro se aproxima a la longitud de la circunferencia y la apotema al radio. Si recordamos que el área de un polígono regular es:

$$\boxed{A=\frac{(P)(ap)}{2}}$$

A= área.
P = perímetro.
Ap = apotema.

Ecuación para calcular el área de un polígono regular.

Al sustituir estos valores por los elementos del círculo, se obtiene:

P= *L* (El perímetro del polígono se acerca a la longitud de la circunferencia).

ap= *r* (La apotema del polígono se acerca al radio de la circunferencia).

El área de un polígono quedaría entonces como.

$A=\frac{(P)(ap)}{2}$ Como *P*=*L* y *ap*= *r* entonces $A=\frac{(L)(r)}{2}$ pero $L = (2)(\pi)(r)$

$A=\frac{(2)(\pi)(r)(r)}{2}$ Simplificando tenemos:

$$\boxed{A=(\pi)(r)^2}$$

Ecuación para calcular el área del círculo.

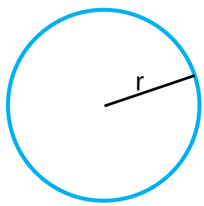
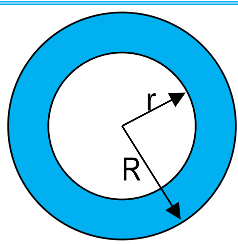
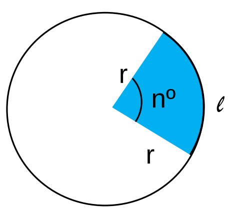
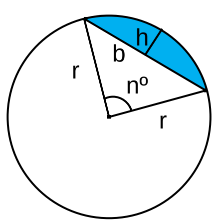
FÓRMULA DE PERÍMETROS Y ÁREAS EN LA CIRCUNFERENCIA.

Área de un sector circular. Es la porción del área del círculo comprendido entre dos radios.

Área de una corona circular. Es la porción del área comprendida entre dos circunferencias concéntricas.

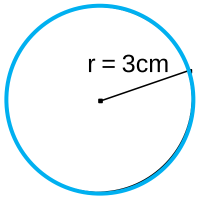
Área de un segmento circular. Es el área comprendida entre dos radios y el arco de la circunferencia que se forma entre la intersección de los radios y la circunferencia.

Área = área del sector circular – área del triángulo.

Nombre de la figura.	Dibujo.	Perímetro.	Área.
Círculo.		P = (π)(D) P = (2)(π)(r) π =3.1416 r = radio D = Diámetro	$A=(\pi)(r)^2$ $A=\frac{(\pi)(D)^2}{4}$
Corona Circular.		P ext.= (π)(D) P int.= (π)(d) P total.=(π)(D+d)	$A=(\pi)(R^2-r^2)$ $A=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$
Sector Circular.		$\ell=\frac{(\pi)(r)(n^o)}{180^o}$ P= ℓ +(2)(r)	$A=\frac{(\pi)(r)^2(n^o)}{360^o}$ $A=\frac{(\ell)(r)}{2}$
Segmento Circular.		P=0.01745(r)(nº)+b b= base del sector circular. h= altura del sector circular.	$A=$ $\frac{(\pi)(r)^2(n^o)}{360^o}-\frac{b(r-h)}{2}$

Ejemplos resueltos de perímetros y áreas de una circunferencia.

1. Determinar la longitud y el área de la siguiente circunferencia.



Solución.

$P = (2)(\pi)(r)$

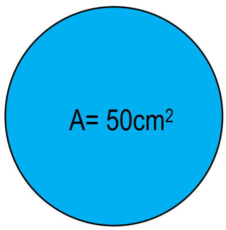
$P = (2)(3.1416)(3cm) = 18.84$ cm.

$$A = (\pi)(r)^2$$

$$A = (3.1416)(3cm)^2$$

$$A = (3.1416)(9cm^2) = 28.27cm^2$$

2. Si el área de una circunferencia es de 50cm², determinar su radio y su perímetro.



Solución.

Como el área es la conocida, sabemos que.

$A = (\pi)(r)^2$ Despejamos el radio.

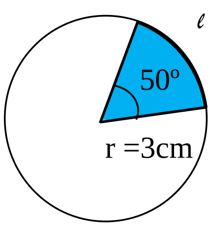
$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \qquad r = \sqrt{\frac{50cm^2}{3.1416}} \qquad r = \sqrt{15.91cm^2}$$

r =3.98cm.

El perímetro se obtiene con.

P= $(2)(\pi)(r)=(2)(3.1416)(3.98cm) = 25.007$cm.

3. Determinar el área del sector circular y la medida del arco ℓ.



Solución.

Sabemos que el área se obtiene con:

$$A = \frac{(\pi)(r)^2(n^\circ)}{360^\circ}$$

$$A = \frac{(3.1416)(3cm)^2(50^\circ)}{360^\circ} \qquad A = 3.92cm^2$$

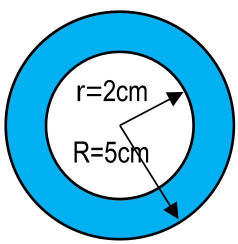
También sabemos que el área se obtiene.

$$A = \frac{(\ell)(r)}{2}$$ despejamos ℓ

$$\ell = \frac{(2)(A)}{r}$$

$$\ell = \frac{(2)(3.92cm^2)}{3cm} = 2.61cm$$

4. Determinar el área de la siguiente corona circular.



Solución.

El área se obtiene con la fórmula.

$$A = (\pi)(R^2 - r^2)$$

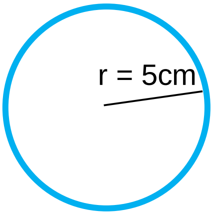
$$A = (3.1416)((5cm)^2 - (2cm)^2)$$

$$A = (3.1416)(25cm^2 - 4cm^2)$$

$$A = (3.1416)(21cm^2) = 65.97cm^2$$

Ejercicios para la clase de perímetros y áreas de una circunferencia.

1. Determinar la longitud y el área de la siguiente circunferencia.

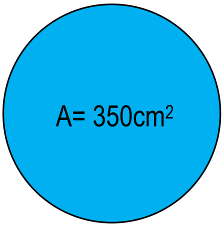


Solución.

$P = (2)(\pi)(r)$

$A = (\pi)(r)^2$

2. Si el área de una circunferencia es de 350cm², determinar su radio y su perímetro.



Solución.

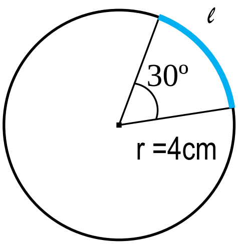
Como el área es la conocida, sabemos que.

$A = (\pi)(r)^2$ Despejamos el radio.

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

$P = (2)(\pi)(r)$

3. Determinar el área del sector circular y la medida del arco ℓ.



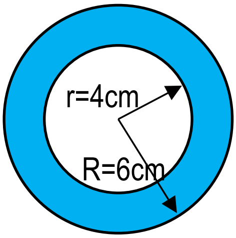
Solución.

Sabemos que el área se obtiene con.

$$A = \frac{(\pi)(r)^2(n^\circ)}{360^\circ}$$

$$A = \frac{(\ell)(r)}{2}$$

4. Determinar el área de la siguiente corona circular.

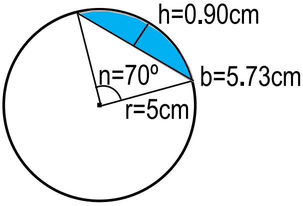


Solución.

El área se obtiene con la fórmula.

$$A = (\pi)(R^2 - r^2)$$

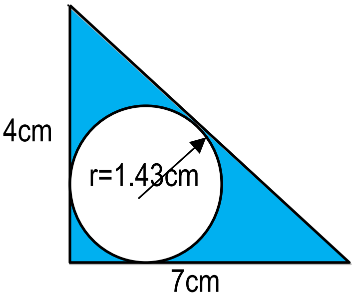
5. Determinar el área del siguiente sector circular.



Solución.

$$A=\frac{(\pi)(r)^{2}(n^{o})}{360^{o}}-\frac{b(r-h)}{2}$$

6. Determinar el área de la zona sombreada.



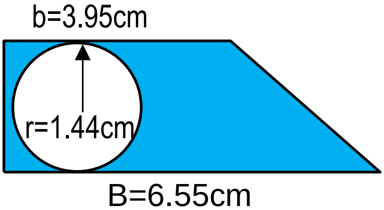
Solución.

Área buscada = Área del triángulo (At) menos el área del círculo (Ac).

$$At=\frac{(base)(altura)}{2}$$

$$Ac=(\pi)(r)^{2}$$

7. Determinar el área de la zona sombreada.



Área buscada = Área del trapecio (At) menos área del círculo (Ac).

Solución.

$$At=\left(\frac{B+b}{2}\right)(h)$$

B=base mayor.
b= base menor.
h = altura.

$$Ac=(\pi)(r)^{2}$$