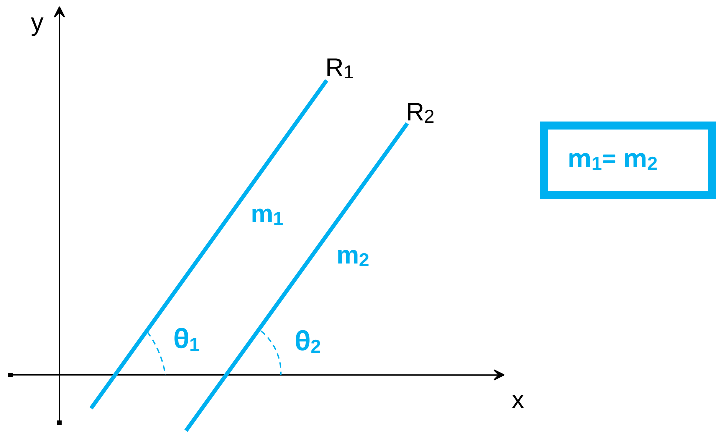
## 1.3.4 Ángulo de inclinación y pendiente entre dos rectas paralelas, oblicuas (no perpendiculares) o perpendiculares.

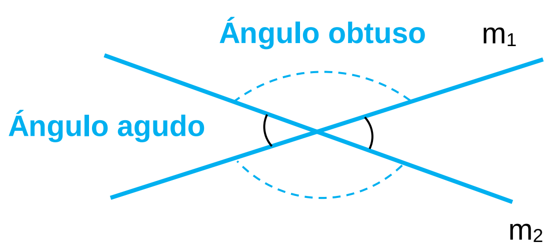
### 1.3.4.1 Rectas paralelas.

Dos rectas son **paralelas**, si tienen la **misma pendiente** y por lo tanto también el **mismo ángulo de inclinación**, como las rectas que se muestra en la siguiente figura.

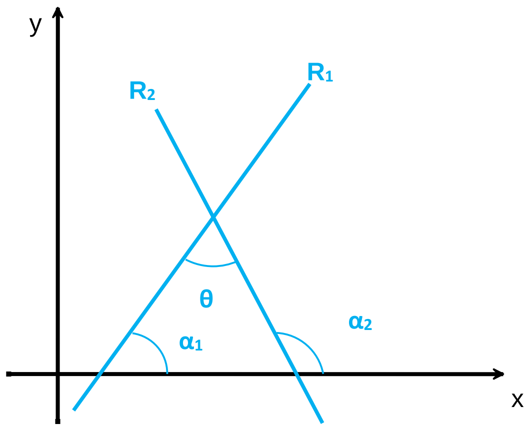



### 1.3.4.2 Ángulo entre dos rectas oblicuas (no perpendiculares).

Cuando dos rectas **no perpendiculares** se cortan entre sí, se forman cuatro ángulos tales que los ángulos opuestos por los vértices son iguales, dos de ellos son **agudos** y dos son **obtusos**, como se muestra en la siguiente figura.



Sean dos rectas **R$_1$** y **R$_2$**, cuyos ángulos son **$\alpha 1$** y **$\alpha 2$** respectivamente, entonces, si deseamos determinar el ángulo que se forma al momento de cortarse tenemos lo siguiente:




**1. Considerando que:**

$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta$

$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

Aplicando la tangente.

$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$

**2. Aplicando la identidad trigonométrica.**

$$Tan\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta}$$

$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$

$$Tan\theta = \frac{sen(\alpha_2 - \alpha_1)}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

**3. Aplicando las fórmulas de la diferencia de ángulos.**

sen(A - B)=senA*cosB- cos A*senB

cos( A-B)=senA*senB + cos A*cosB

$$Tan\theta = \frac{(sen\alpha_2)(\cos\alpha_1) - (\cos\alpha_2)(sen\alpha_1)}{(sen\alpha_2)(sen\alpha_1) + (\cos\alpha_2)(\cos\alpha_1)}$$

**4. Dividiendo cada factor entre $(\cos\alpha_2)(\cos\alpha_1)$ y Factorizando tenemos que:**

$$Tan\theta = \frac{\dfrac{(sen\alpha_2)(\cos\alpha_1)}{(\cos\alpha_2)(\cos\alpha_1)} - \dfrac{(\cos\alpha_2)(sen\alpha_1)}{(\cos\alpha_2)(\cos\alpha_1)}}{\dfrac{(sen\alpha_2)(sen\alpha_1)}{(\cos\alpha_2)(\cos\alpha_1)} + \dfrac{(\cos\alpha_2)(\cos\alpha_1)}{(\cos\alpha_2)(\cos\alpha_1)}}$$

**5. Reduciendo factores iguales.**

$$Tan\theta = \frac{\dfrac{sen\alpha_2}{\cos\alpha_2} - \dfrac{sen\alpha_1}{\cos\alpha_1}}{\dfrac{(sen\alpha_2)(sen\alpha_1)}{(\cos\alpha_2)(\cos\alpha_1)} + 1}$$

**6. Ordenando términos y cambiando identidad trigonométrica.**

$$Tan\theta = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + (\tan\alpha_2)(\tan\alpha_1)}$$

**7. Pero la $\tan\alpha_2 = m_2$ y $\tan\alpha_1 = m_1$**

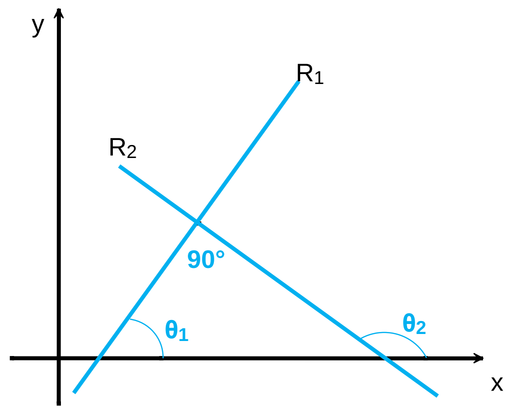
entonces tenemos que:

$$Tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_2)(m_1)}$$

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + (m_2)(m_1)}\right)}$$

### 1.3.4.3 Rectas perpendiculares.

Dos rectas son **perpendiculares**, si la diferencia de sus ángulos de inclinación es un ángulo **recto (90°)**, por lo que sus pendientes son el recíproco negativo de la otra o lo que es lo mismo que el producto de sus pendientes sea **-1**, como se muestra en la siguiente figura.




**1.- Sabemos que en todo triángulo, la medida de un ángulo externo equivale a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes.**

Por lo anterior tenemos que:

$\theta_2 = \theta_1 + 90°$

$90° = \theta_2 - \theta_1$

$\tan 90° = \tan(\theta_2 - \theta_1)$.

**2. Siguiendo el procedimiento realizado anteriormente cuando las rectas no forman un ángulo recto tenemos lo siguiente.**

$$Tan\,90° = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + (\tan\theta_2)(\tan\theta_1)}$$

**3. Como la tan90° no está definida, aplicaremos el recíproco en cada lado de la expresión, quedando:**

$$\frac{1}{Tan\,90°} = \frac{1 + (\tan\theta_2)(\tan\theta_1)}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$$

**4. Pero como:**

$$\frac{1}{Tan\,90°} = \cot 90° \qquad Tan\,\theta_2 = m_2 \qquad Tan\,\theta_1 = m_1$$

$$Cot\,90° = \frac{1 + (\tan\theta_2)(\tan\theta_1)}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$$ y como **Cot90°= 0**

$$0 = \frac{1 + (m_2)(m_1)}{m_2 - m_1}$$ **Finalmente** $$\boxed{(m_2)(m_1) = -1}$$

**Para que dos rectas sean perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a -1.**

## Ejemplos resueltos.

### Ejemplo 1.

Hallar el ángulo agudo que se forma al cortarse dos rectas cuyas pendientes son **$m_1=1$** y **$m_2= -4$**.

$$Tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1+(m_2)(m_1)}$$

$$Tan\theta = \frac{-4-1}{1+(-4)(1)}$$

$$Tan\theta = \frac{-5}{1+(-4)}$$

Tanθ= $\frac{-5}{1-4}$

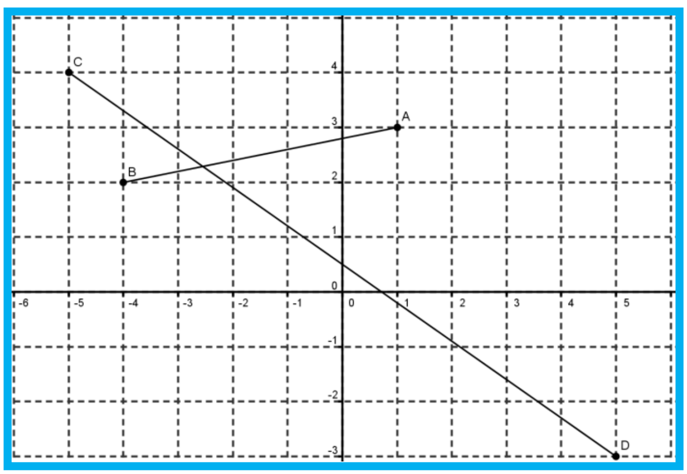
Tanθ= $\frac{-5}{-3}$

Tanθ= $\frac{5}{3}$ θ= $\tan^{-1}(1.66)$

**θ= 59.03°**

### Ejemplo 2.

Investiga, por medio de sus pendientes, si la recta que pasa por los puntos **A(1, 3)** y **B( -4, 2)** es paralela, perpendicular u oblicua a la recta que pasa por los puntos **C(-5, 4)** y **D(5, -3)**.




$$m\overline{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m\overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m\overline{CD} = \frac{-3-4}{5-(-5)} \qquad m\overline{AB} = \frac{2-3}{-4-1}$$

$$m\overline{CD} = \frac{-7}{10} = -\frac{7}{10} \qquad m\overline{AB} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

### Conclusión.

**1.** Como m $\overline{AB} \neq$ (no es igual) a m $\overline{CD}$ las rectas **no son paralelas**.

**2.** Como (m $\overline{AB}$)(m $\overline{CD}$)= $\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{7}{10}\right)$ = - $\frac{7}{50}$ y no es -1 entonces **no son perpendiculares**.

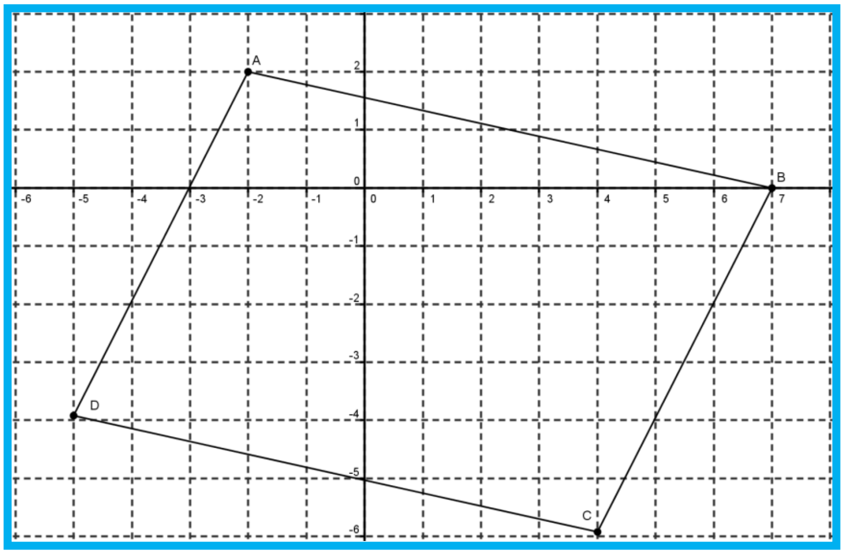
**3.** Por lo anterior calcularemos el ángulo entre ellas.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1+(m_2)(m_1)}\right) \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{5} - \left(-\frac{7}{10}\right)}{1+\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{7}{10}\right)}\right) \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{9}{10}}{\frac{43}{50}}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{450}{430}\right)$$ θ= $\tan^{-1}(1.04)$ **θ= 46.30° se trata de dos rectas oblicuas.**

**Ejemplo 3.**

Mediante el concepto de pendiente demostrar que los puntos **A(-2, 2)**, **B(7, 0)**, **C( 4, -6)** y **D(-5, -4)** son los vértices de un paralelogramo.




Para demostrar que es un paralelogramo la m$\overline{AD}$ = m $\overline{CB}$ y m$\overline{AB}$ = m$\overline{CD}$.

m $\overline{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ m $\overline{CB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ m $\overline{CD} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ m $\overline{AD} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

m $\overline{AB} = \dfrac{0-2}{7-(-2)}$ m $\overline{CB} = \dfrac{-6-0}{4-7}$ m $\overline{CD} = \dfrac{-4-(-6)}{-5-4}$ m $\overline{AD} = \dfrac{-4-2}{-5-(-2)}$

m $\overline{AB} = \dfrac{-2}{7+2}$ m $\overline{CB} = \dfrac{-6}{-3}$ m $\overline{CD} = \dfrac{-4+6}{-9}$ m $\overline{AD} = \dfrac{-6}{-5+2}$

m $\overline{AB} = \dfrac{-2}{9}$ m $\overline{CB}$ =2 m $\overline{CD} = \dfrac{2}{-9}$ m $\overline{AD} = \dfrac{-6}{-3}$ =2

En base a los cálculos anteriores se puede demostrar que:

m $\overline{AD}$ = m $\overline{CB}$.

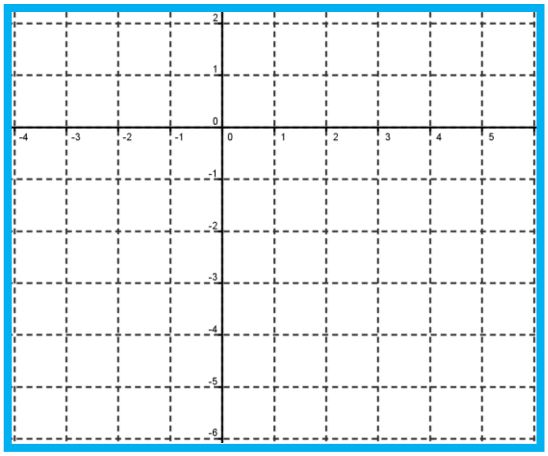
m $\overline{AB}$ = m $\overline{CD}$.

**Por lo que los puntos A, B, C y D son los vértices de un paralelogramo.**

## Ejercicios para resolver en clase.

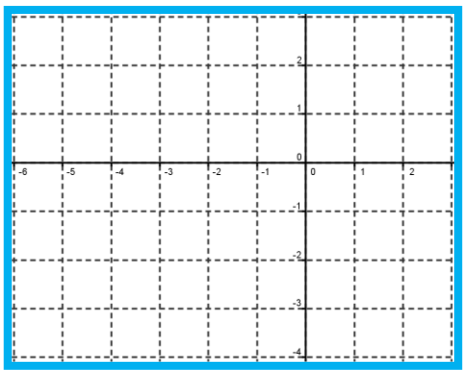
### Ejercicio 1.

Mediante el concepto de pendiente, demostrar que la recta que pasa por los puntos **A(4, 2)** y **B(-2, -6)** es perpendicular a la recta que pasa por los puntos **C(5, -5)** y **D(-3, 1)**.




### Ejercicio 2.

Mediante el concepto de pendiente, demostrar que la recta que pasa por los puntos **A( -2, 2)** y **B(-5, -4)** es paralela a la recta que pasa por los puntos **C(2.5, 1)** y **D(0, -4)**.




### Ejercicio 3.

Mediante el concepto de pendiente demostrar que los puntos **A(5, 3)**, **B(3, -2)** y **C(-2, 0)** son los vértices de un triángulo rectángulo.