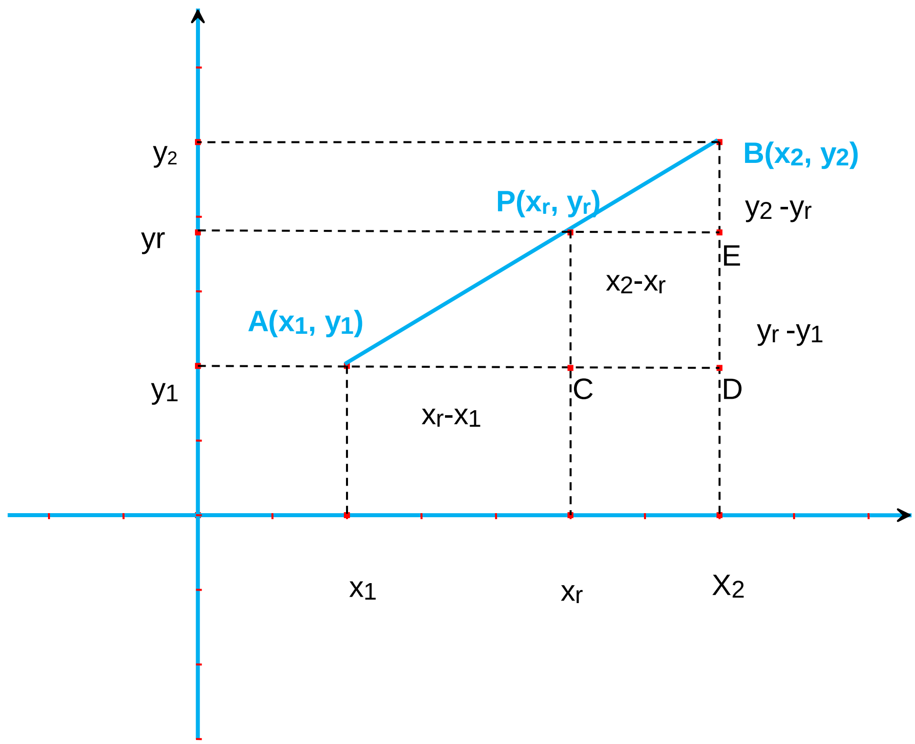
1.3.2 División de un segmento de recta en una razón dada.

Sean los puntos **A(x_1, y_1)** y **B(x_2, y_2)** los extremos del segmento $\overline{AB}$, si se desea encontrar el punto **P(x_r, y_r)** que divida al segmento de recta en una razón dada **r**, como se muestra en la siguiente figura.

Si se proyectan las coordenadas de cada punto hacia los ejes, tenemos los triángulos semejantes **Δ APC** y **Δ BPE**.



Sabemos que **dos triángulos son semejantes** cuando tienen sus **ángulos respectivamente iguales** y **sus lados proporcionales**. De acuerdo a lo anterior tenemos que:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BE}}$$

Al sustituir el valor de cada segmento en términos de **x**, considerando que:

$$\mathbf{r} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BE}}$$

Se obtiene la siguiente expresión.

$$r = \frac{x_r - x_1}{x_2 - x_r} = \frac{y_r - y_1}{y_2 - y_r}$$

Para el valor de la abscisa.

$$r = \frac{x_r - x_1}{x_2 - x_r}$$

$r(x_2-x_r)= x_r-x_1$

$rx_2-rx_r = x_r-x_1$

$rx_2 +x_1 = x_r + rx_r$

$rx_2 +x_1 = x_r (1+ r)$

$$\boxed{x_r= \frac{rx_2 + x_1}{(1+r)}}$$

Para el valor de la ordenada.

$$r = \frac{y_r - y_1}{y_2 - y_r}$$

$r(y_2-y_r) = y_r-y_1$

$ry_2 - ry_r = y_r - y_1$

$ry_2 + y_1 = y_r + ry_r$

$ry_2 +y_1 = y_r (1+ r)$

$$\boxed{y_r= \frac{ry_2 + y_1}{(1+r)}}$$

Por lo tanto el punto **P(x_r, y_r)**, que divide a un segmento en una razón dada **r** se determina:

$$\boxed{P(x_r , y_r) = \left(\frac{r\,x_2 + x_1}{(1+r)}\right),\left(\frac{r\,y_2 + y_1}{(1+r)}\right)}$$

Un caso particular es cuando el punto **P(x_r , y_r)** se encuentran a la mitad del segmento $\overline{AB}$, esto es que esta en el **punto medio**, esto implica que $\overline{AP} = \overline{PB}$ por lo tanto la razón de semejanza $r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ es **r = 1**

Así las fórmulas de punto medio P son:

$$\boxed{P(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)}$$

x_m= Valor de la abscisa en el punto medio.

y_m= Valor de la ordenada en el punto medio.

Ejemplos resueltos.

Ejemplo 1.

Sea **A(5, 3)** y **B(-3, -3)** los extremos del segmento $\overline{AB}$ encuentre las coordenadas del punto **P** que lo divide a una razón **r = 1/3**

$$x_r = \frac{rx_2 + x_1}{(1+r)} \qquad y_r = \frac{ry_2 + y_1}{(1+r)}$$

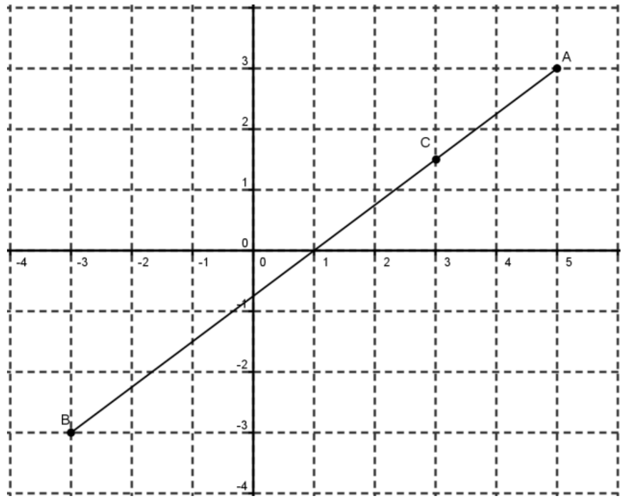
$$x_r = \frac{\frac{1}{3}(-3)+5}{1+\frac{1}{3}} \qquad y_r = \frac{\frac{1}{3}(-3)+3}{1+\frac{1}{3}}$$

$$x_r = \frac{-1+5}{\frac{4}{3}} \qquad y_r = \frac{-1+3}{\frac{4}{3}}$$

$$x_r = \frac{4}{\frac{4}{3}} \qquad y_r = \frac{2}{\frac{4}{3}}$$

$$x_r = \frac{12}{4} = 3 \qquad y_r = \frac{6}{4} = 1.5$$

Por lo tanto P(3, 1.5)



Lo que significa que la medida de $\overline{PA}$ es una tercera parte de la medida de $\overline{PB}$.

Ejemplo 2.

Sea **A(3, -4)** y **B(1, 6)** los extremos del segmento $\overline{AB}$ encuentre las coordenadas del punto **P** que lo divide a una razón **r = -1 / 2**

$$x_r = \frac{rx_2 + x_1}{(1+r)} \qquad y_r = \frac{ry_2 + y_1}{(1+r)}$$

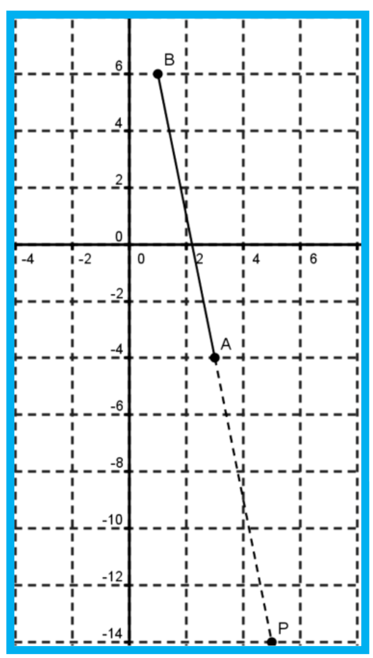
$$x_r = \frac{-\frac{1}{2}(1)+3}{1+(-\frac{1}{2})} \qquad y_r = \frac{-\frac{1}{2}(6)+(-4)}{1+(-\frac{1}{2})}$$

$$x_r = \frac{-\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}} \qquad y_r = \frac{-3-4}{\frac{1}{2}}$$

$$x_r = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} \qquad y_r = \frac{-\frac{7}{1}}{\frac{1}{2}}$$

$$x_r = \frac{10}{2} = 5 \qquad y_r = \frac{14}{1} = -14$$

Por lo tanto P(5, -14).



Como **r** es negativo, el punto **P** se encuentra fuera del segmento $\overline{AB}$, y se observa que la medida de $\overline{PA}$ es la mitad de la medida de $\overline{PB}$.

Ejemplo 3.

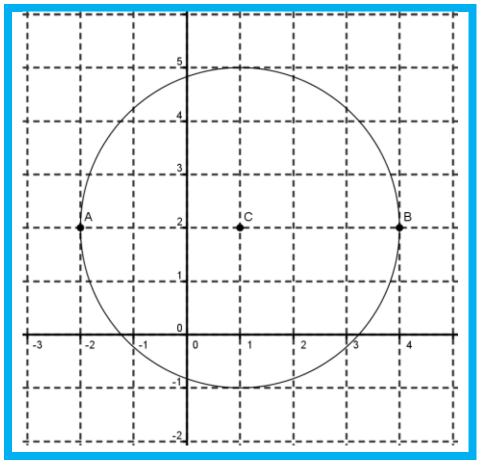
Los puntos **A(-2, 2)** y **B(4, 2)** son los extremos del **diámetro de una circunferencia**, determine las coordenadas del centro **C** que divide en dos partes iguales al segmento $\overline{AB}$.

$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $\quad$ $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$

$x_m = \frac{-2+4}{2}$ $\quad$ $y_m = \frac{2+2}{2}$

$x_m = \frac{2}{2} = 1$ $\quad$ $y_m = \frac{4}{2} = 2$

$x_m = 1$ $\quad$ $y_m = 2$

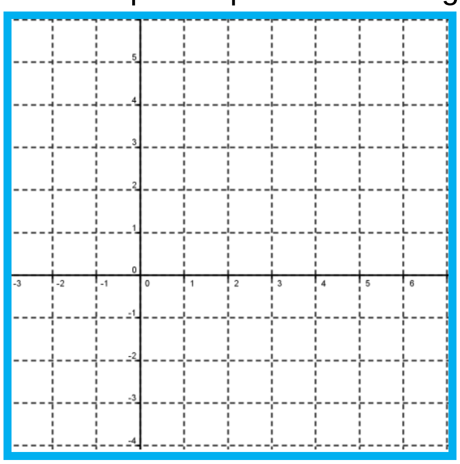


Por lo tanto las coordenadas del centro son **C(1, 2)**.

Ejercicios para resolver en clase.

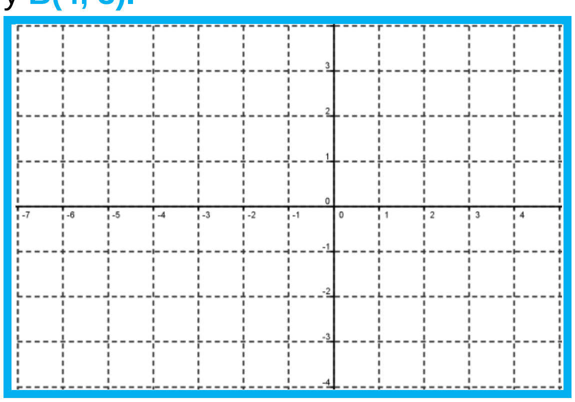
Ejercicio 1.

Hallar el punto que divide al segmento de recta $\overline{AB}$ en una razón **r = 2**, si **A(-1, -3)** y **B(6, 5).**



Ejercicio 2.

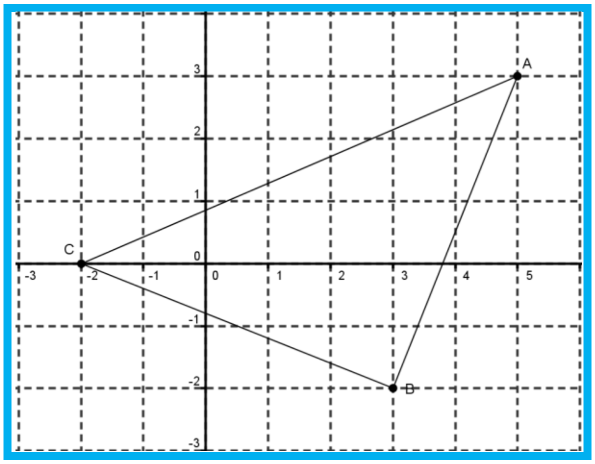
Hallar el punto **P** que divide al segmento de recta $\overline{AB}$ en una razón **r = -1/4**, si **A(-4, -2)** y **B(4, 3).**



Ejercicio 3.

Dados los puntos **A(5, 3)**, **B(3, -2)** y **C(-2,0)** que son los vértices de un triángulo, encuentre las coordenadas de sus medianas y trácelas en la figura.

Recordemos que la **mediana** es el segmento trazado desde un vértice hasta el **punto medio** del lado opuesto. Al punto de intersección de las tres medianas se llama **baricentro.**



Ejercicio 4.

Demostrar que el punto medio **P** de la hipotenusa del triángulo rectángulo, cuyos vértices son los puntos **A(5, 5)**, **B(-4, 2)** y **C(-2, -4)** equidista (está a la misma distancia) a los tres vértices.