

2.1.3 Ecuación general de la circunferencia.

La ecuación general de la circunferencia se obtiene a partir de la ecuación ordinaria, desarrollando los binomios cuadrados e igualando a cero.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 .$$

Desarrollando los binomios cuadrados tenemos:

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 - r^2 = 0.$$

Ordenando términos tenemos:

$$x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0.$$

Con la finalidad de obtener una ecuación más sintetizada haremos las siguientes asignaciones:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Entonces:

$$D = -2h$$

$$E = -2k$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2$$

Pero también a partir de la ecuación general podemos encontrar el centro $C(h, k)$ y el radio r , en términos de D, E y F .

$$h = -\frac{D}{2}$$

$$k = -\frac{E}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

Entonces la ecuación general de la circunferencia queda de la siguiente manera:

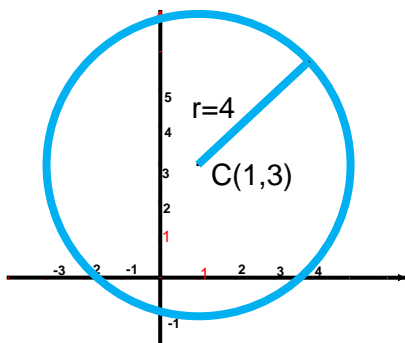
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ejemplos resueltos.

Ejemplo 1.

Hallar la ecuación general de la circunferencia con centro en $C(1, 3)$ y $r = 4$.

Debemos de obtener una ecuación de la forma:



$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Tenemos como datos:

$$h=1, k=3 \text{ y } r=4$$

Por lo que necesitamos conocer cuánto vale D, E y F.

$$D = -2h \quad D = -2(1) = -2$$

$$E = -2k \quad E = -2(3) = -6$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2$$

$$F = (1)^2 + (3)^2 - (4)^2$$

$$F = 1 + 9 - 16$$

$$F = -6$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$$

Ejemplo 2.

Hallar las coordenadas del centro y el valor del radio de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 3 = 0$.

Solución.

Si comparamos la ecuación:

$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 3 = 0$ con la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

obtenemos que $D=4$, $E=2$ y $F=-3$

$$h = -\frac{D}{2} \quad h = -\frac{4}{2} \quad h = -2$$

$$k = -\frac{E}{2} \quad k = -\frac{2}{2} \quad k = -1$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{4^2 + 2^2 - 4(-3)}}{2}$$

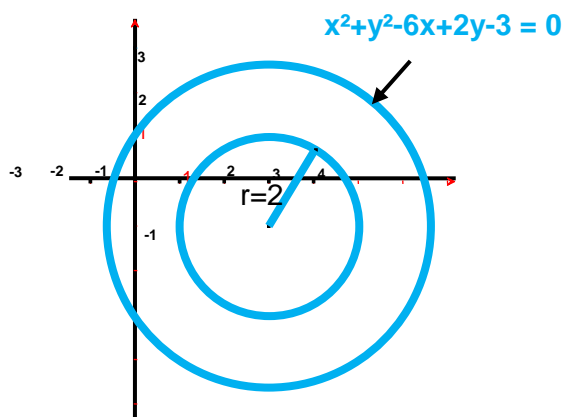
$$r = \frac{\sqrt{16 + 4 + 12}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{32}}{2} \quad r = \frac{5.65}{2} \quad 2.82$$

Por lo tanto el centro $C(-2, -1)$
y su radio $r = 2.82$

Ejemplo 3.

Hallar la ecuación general de la circunferencia cuyo radio $r = 2$, la cual es concéntrica a otra cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$.



Solución:

Primero, como las dos circunferencias son concéntricas esto significa que **su centro es el mismo**, por lo que de la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$ obtendremos las coordenadas del centro.

$$h = -\frac{D}{2} \quad h = -\frac{-6}{2} \quad h = +3$$

$$k = -\frac{E}{2} \quad k = -\frac{2}{2} \quad k = -1$$

Por lo que el centro está en $C(3, -1)$.

Segundo, como $C(3, -1)$ y el radio $r = 2$, ahora buscaremos los valores de **D**, **E** y **F** para obtener su ecuación general.

$$D = -2h \quad D = -2(3) = -6$$

$$E = -2k \quad E = -2(-1) = +2$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2$$

$$F = (3)^2 + (-1)^2 - (2)^2$$

$$F = 9 + 1 - 4$$

$$F = 6$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$$

Ejercicios para resolver en clase.

Ejercicio 1.

Hallar la ecuación general de la circunferencia con centro en $C(3, 2)$ y $r = 5$.

Ejercicio 2.

Hallar la ecuación general de la circunferencia con centro en $C(-5, -3)$ y $r = 6$.

Ejercicio 3.

Hallar la ecuación general de la circunferencia con centro en $C(0, -3)$ y $r = 4$.

Ejercicio 4.

Hallar las coordenadas del centro y el valor del radio de la circunferencia cuya ecuación es:
 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$.

Ejercicio 5.

Hallar las coordenadas del centro y el valor del radio de la circunferencia cuya ecuación es:
 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 30 = 0$.

2.1.4 Problemáticas situadas.

1. LA TORRE DE PISA.



La construcción del campanario para la catedral de la ciudad toscana de Pisa se encargó al arquitecto Bonanno Pisano hacia el año 1173. Éste se propuso erigir un campanario en forma de columna y separado de la iglesia.

En la *Piazza del Duomo*, declarada Patrimonio cultural de la Humanidad en 1987, se ubican la catedral, el baptisterio y el famoso *campanile* (campanario). La catedral de Pisa es un gran edificio de estilo románico en mármol blanco, cuya construcción se inició en 1063; la fachada de rica decoración, se añadió al resto del conjunto en el siglo XII. El baptisterio, comenzado en 1153, es un edificio románico de planta circular, coronado con una cúpula del siglo XIV, profusamente adornada.

El *campanile*, conocido por la Torre inclinada de Pisa, es el elemento artístico que genera mayor atracción; se comenzó su construcción en 1173 pero las obras se suspendieron cuando los arquitectos se dieron cuenta de que los cimientos del edificio eran inadecuados en un suelo tan blando. No obstante, en la segunda mitad del siglo XIV se terminó la estructura. La Torre Inclinada, de planta circular, está compuesta por siete pisos de arquerías, y tiene una inclinación de unos 10°. A principios de 1990 se cerró su visita a los turistas por motivos de seguridad, y en 1992 se comenzaron las obras de fijación de la base. Según la leyenda, el científico Galileo aprovechó la inclinación de la torre para realizar experimentos de caída libre.

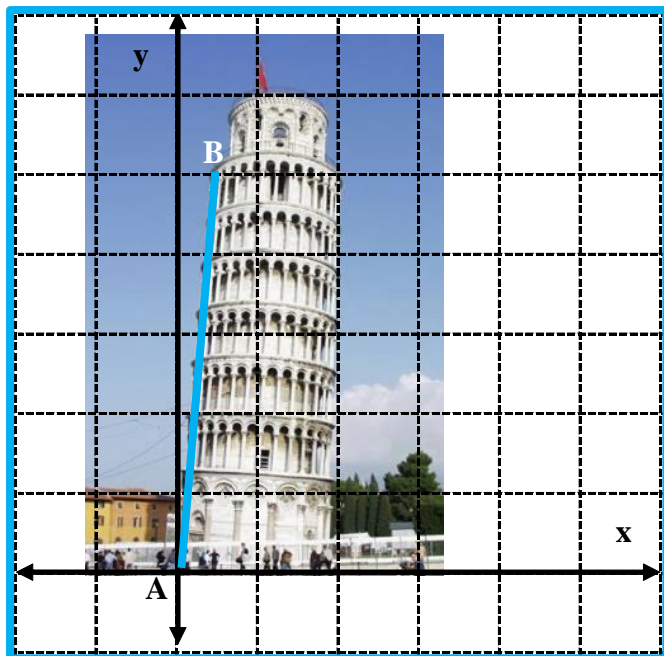
En 1350 la inclinación era de 1,40 metros, en 1817 de 3,80 metros y en 1993 de 4,47 metros. Tras las obras la inclinación de la torre retrocedió a los 4,10 metros en 2001 y de ahí a los actuales 3,99 metros.

El gobierno italiano ha emprendido numerosas medidas para la conservación de este singular monumento. Así, en los años 1994 y 1995, se colocaron en la parte norte de la torre 690 toneladas de plomo en forma de barras y a modo de contrapeso; su fijación se realizó mediante la inserción de una serie de anclas enterradas en el suelo, a 40 m. de profundidad. Hasta el momento, la medida funciona, por lo que se ha podido detener la inclinación de la torre. Por el contrario, otros intentos de estabilización, como inyecciones de hormigón en los cimientos o la congelación del suelo, ha resultado un fracaso. En 1998, se aseguró la parte norte de la torre mediante dos cables de acero de 100 ni de largo y 4 toneladas de peso cada uno.

Datos de interés.

- * **Nombre:** Torre inclinada de Pisa.
- * **Función:** Campanario.
- * **Período de construcción:** 1173-1372
- * **Altura:** 56 m, aprox.
- * **Diámetro exterior en la base:** 15,5 m, aprox.
- * **Diámetro interior en la base:** 7,4 m, aprox.
- * **Peso:** 14.500 toneladas, aprox.
- * **Pisos:** 7 más el claro
- * **Número de campanas:** 7

Con la información mostrada en los siguientes esquemas. Determina:



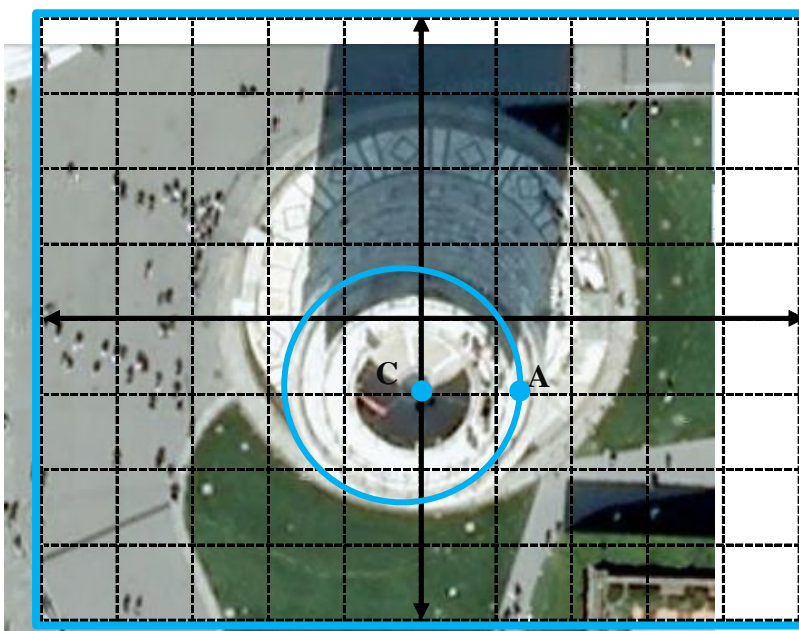
a) En base a la foto y el sistema de referencia, estima cuáles son las coordenadas del punto **A** y **B**. Puedes utilizar tu regla.

A(,).

B(,).

b) Determina la pendiente y el ángulo de inclinación entre los puntos **A** y **B**.

c) ¿De cuántos grados es el ángulo de inclinación con respecto al eje “**y**”?



d) En base a la foto y el sistema de referencia, estima cuáles son las coordenadas del centro **C** y el punto **A**. Puedes utilizar tu regla.

C(,).

A(,).

e) Determina el radio de la circunferencia.

Toma aérea de la torre de pisa. Escala 1cm. en la foto representa 5m. reales.

f) Encuentra la ecuación general de la circunferencia que representa el contorno de la Torre de Pisa.

2. Choque de un meteorito en Yucatán (México).



Hace 65 millones de años la Tierra cambió de forma repentina, muchas especies desaparecieron, plantas, animales terrestres y marinos y sobre todo, los grandes dinosaurios. Sin embargo, los pequeños mamíferos sobrevivieron. El posible causante de tal desastre sería el choque de un gran meteorito en la Península del Yucatán (México) cuyas características se han estimado en: Diámetro aproximado de 10 a 14 km, densidad de 1300-3400 kg/m³ y una velocidad de 20-25 km/s.

El cráter de Chicxulub es un antiguo **cráter de impacto** cuyo centro aproximado está ubicado al noroeste de la **Península de Yucatán**, en **México**. Este centro se encuentra cerca de la población de **Chicxulub**, a la que el cráter debe su nombre, el diámetro aproximado es de 200 km.

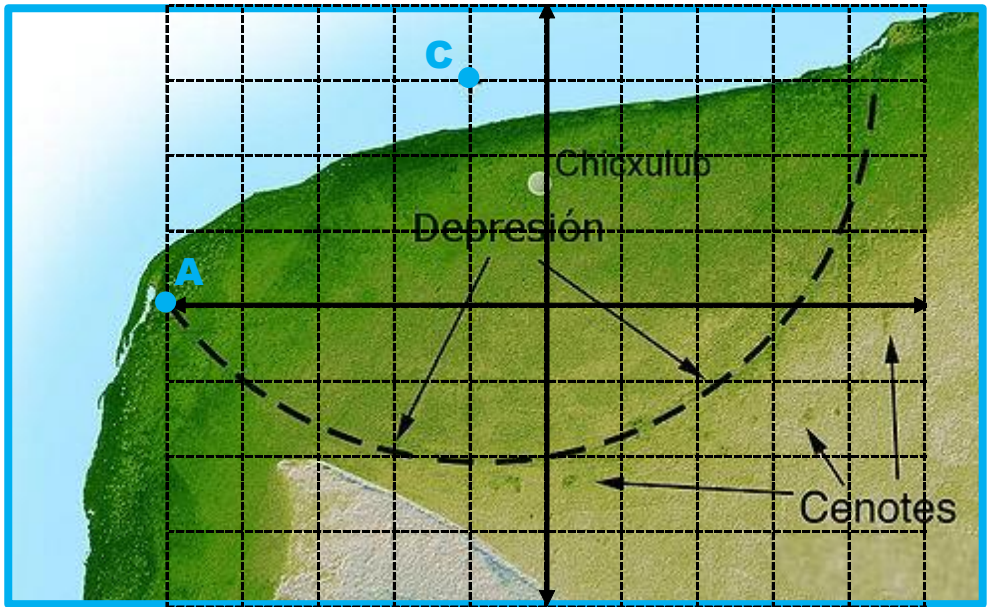
Muchos científicos creen que las criaturas prehistóricas desaparecieron cuando los detritos causados por el impacto del objeto sobre la Península de Yucatán oscurecieron los cielos, enfriaron la Tierra y cargaron la atmósfera de bióxido de carbono. Eso creó un efecto de invernadero que hizo imposible la vida para los gigantescos animales que reinaron sobre la Tierra durante 100 millones de años.

El cráter es considerado como una de las zonas de impacto más grandes del mundo; se estima que el **bólide** que formó el cráter medía al menos diez kilómetros de diámetro.

Las pruebas de un origen por impacto del cráter incluyen **“cuarzo chocado”**, una anomalía gravitatoria y la presencia de tectitas en el área circundante. También la presencia de **iridio** y en ocasiones de **platino** como metal asociado.

La edad de las rocas y los **análisis isotópicos** mostraron que esta estructura data de finales del período **Cretácico**, hace aproximadamente 65 millones de años. La principal evidencia es una delgada capa de iridio encontrada en sedimentos. El iridio es un metal escaso en la Tierra, pero abundante en los meteoritos y asteroides.

El asteroide que, **hace unos 65 millones de años**, abrió un **cráter mayor a los 180 kilómetros de diámetro** en Yucatán (México), pudo no ser el causante, como se cree, de la desaparición de los dinosaurios, según un estudio de un equipo multinacional de científicos, dirigido por la geóloga Gerta Keller. El trabajo, que aparece hoy en la revista "Proceedings", de la Academia Nacional de las Ciencias de EE.UU., fecha el impacto 300.000 años antes de lo que se pensaba, lo que descartaría al meteorito como causante del final de los dinosaurios. Sin embargo, dos de los autores creen que los datos no son definitivos.



Nota. En el dibujo cada 1cm. Representa 20km.

Basándote en el gráfico anterior, determina:

- 1) Las coordenadas del centro **C** ().
- 2) Las coordenadas del punto **A** ().
- 3) El radio de la circunferencia que dejó el cráter del meteorito.

- 4) La ecuación ordinaria de la circunferencia del cráter.