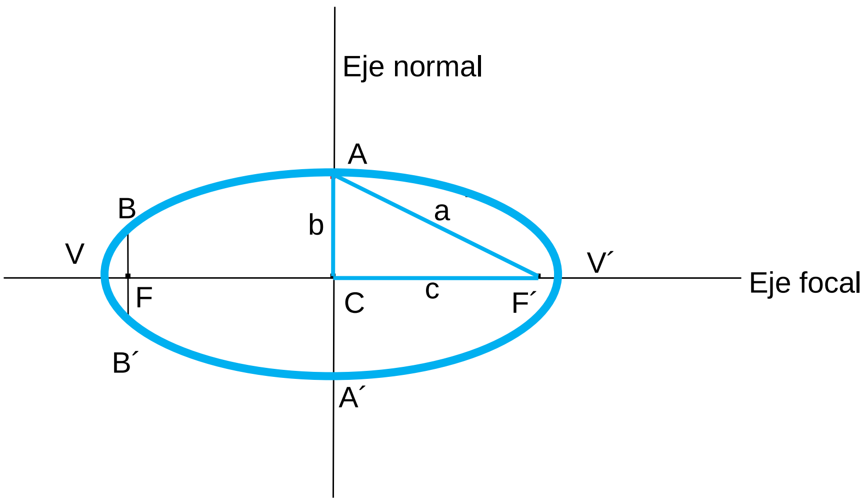
3.1. La elipse.

3.1.1. La elipse como lugar geométrico.

La elipse es el lugar geométrico del conjunto de puntos **P(x, y)** cuya suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos equivalen al doble de una constante (2a), la cual representa la distancia entre sus vértices, como se muestra en la siguiente figura.

Elementos de la elipse.



F, F´= Focos.

V,V´ = Vértices.

B, B´= Longitud del lado recto.

C = Centro.

$\overline{VV'}$ = Eje mayor.

$\overline{AA'}$ = Eje menor.

$\overline{CA}$ =b

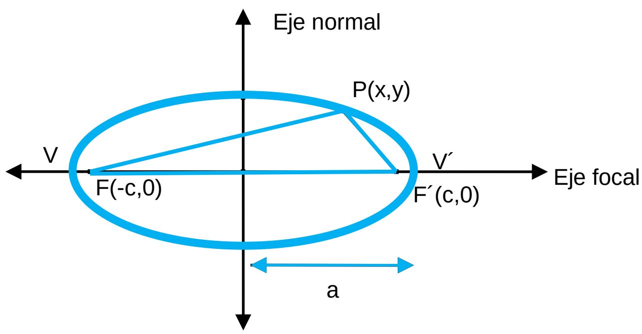
$\overline{CF'}$ = c

$\overline{CV'}$ = $\overline{AF'}$ = a

El triángulo **abc**, es un triángulo rectángulo y se aplica el Teorema de Pitágoras, por lo que **$a^2 = b^2 + c^2$**

3.1.2. Ecuación ordinaria de la elipse con centro en el origen.

Partimos de la definición de elipse, la cual establece que esta cónica es el lugar geométrico del conjunto de puntos **P(x, y)** cuya suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos equivalen al doble de una constante (2a), como se muestra en la siguiente figura.



Aplicando la definición de la elipse se tiene que:

$\overline{PF}+\overline{PF'}$=2a

$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}$ + $\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$ = 2a

Despejamos la primera raíz.

$\sqrt{(x+c))^2+(y-0)^2}$ =2a - $\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$ Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad.

$(x+c)^2+y^2 = 4a^2- 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$ Eliminando términos semejantes y agrupando.

$(x+c)^2-(x-c)^2 +y^2 - y^2= 4a^2- 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$(x+c)^2-(x-c)^2= 4a^2- 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ Resolviendo los binomios al cuadrado.

$x^2+2xc+c^2 – (x^2-2xc+c^2)= 4a^2- 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$x^2+2xc+c^2 – x^2+2xc-c^2= 4a^2- 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ Eliminando términos semejantes.

$4xc=4a^2- 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ Dejamos solito al término que contiene a la raíz.

$4xc-4a^2=- 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ Dividiendo entre 4.

$xc- a^2= - a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ Aplicamos inverso aditivo tenemos:

$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = + a^2-xc$ Elevando al cuadrado ambos miembros tenemos:

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = (a^2-xc)^2$$

$a^2[(x-c)^2+y^2]= (a^2-xc)^2$ Desarrollando:

$a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=a^4-2 xca^2+x^2c^2$ Eliminando paréntesis:

$a^2x^2- a^22xc+ a^2c^2+ a^2y^2=a^4-2 xca^2+x^2c^2$ Agrupando términos semejantes:

$a^2x^2- 2a^2xc+2a^2xc +a^2c^2+ a^2y^2=a^4 +x^2c^2$

$a^2x^2-x^2c^2 + a^2y^2 =a^4 - a^2c^2$ Factorizando con respecto a **"x"** y **"a"**:

$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 =a^2 (a^2- c^2)$

si $a^2=b^2+c^2$ entonces $b^2=a^2-c^2$ Sustituyéndola tenemos:

$x^2(b^2) + a^2y^2 =a^2 (b^2)$ Dividiéndola entre a^2 b^2:

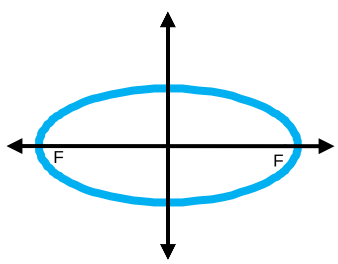
$\frac{x^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$ Nos queda:

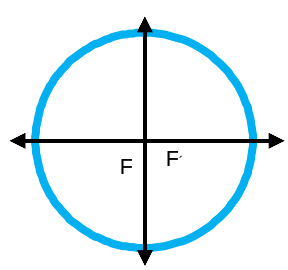
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Ecuación ordinaria de la elipse con centro en el origen.

Excentricidad (e).

La excentricidad nos indica que tan alargada o achatada está una elipse, a tal grado de que sus focos están tan juntos que formarían el centro de una circunferencia.

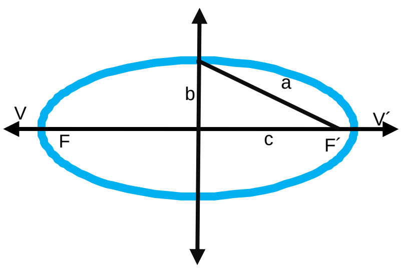
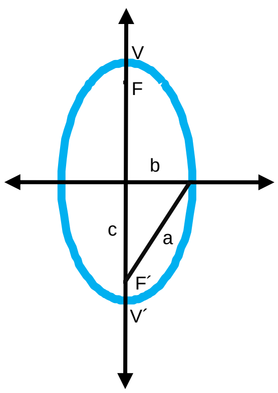




La excentricidad se define como el cociente de "c" entre "a". $e = \frac{c}{a}$

Como **"a"** siempre es mayor que **"c"** el cociente que resulta **siempre es mayor que cero pero menor a uno**. Cuando el valor de la excentricidad se aproxima a cero, la elipse se asemeja a una circunferencia y si se aproxima a uno, la elipse se alarga.

La siguiente tabla muestra algunos puntos importantes de la elipse, así como su ecuación ordinaria.

Figura.	**Ecuación.**	**Fórmulas.**
	$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ a>b $a^2=b^2+c^2$	C(0, 0) F´(c, 0) F(-c, 0) V'(a, 0) V(-a, 0) LLR= $\frac{2b^2}{a}$ e= $\frac{c}{a}$
	$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$ a>b $a^2=b^2+c^2$	C(0, 0) F(0, c) F´(0, -c) V(0, a) V´(0, -a) LLR= $\frac{2b^2}{a}$ e= $\frac{c}{a}$

Ejemplos resueltos.

Ejemplo 1.

Hallar las coordenadas de los vértices, focos, la longitud de cada lado recto, el valor de la excentricidad y la gráfica de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Como **"a"** siempre es mayor que **"b"** tenemos que la ecuación es:

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ de donde:

$a^2=9$ a= $\sqrt{9}$ **a=3**

$b^2=4$ b= $\sqrt{4}$ **b=2**

Para conocer el valor de **"c"** se aplica el Teorema de Pitágoras.

$a^2=b^2+c^2$

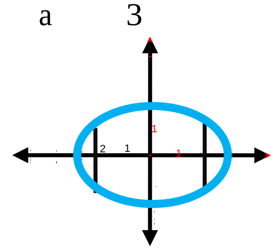
c= $\sqrt{a^2-b^2}$

c= $\sqrt{9-4}$ c= $\sqrt{5}$ **c=2.23**

C(0 ,0)   C(0, 0)
F'(c, 0)   F(2.23, 0)
F(-c, 0) F´(-2.23, 0)
V'(a, 0)   V'(3, 0)
V(-a, 0)   V(-3, 0)

LLR= $\frac{2b^2}{a}$ = $\frac{2(4)}{3}$ = $\frac{8}{3}$ =2.6

e= $\frac{c}{a}$ = $\frac{c}{a}$ = $\frac{2.23}{3}$ = 0.74



Ejemplo 2.

Hallar las coordenadas de los vértices, focos, la longitud de cada lado recto, el valor de la excentricidad y la gráfica de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$.

Como **“a”** siempre es mayor que **“b”** entonces su ecuación es:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

De donde:

$a^2=25$ $a=\sqrt{25}$ **a=5**

$b^2=16$ $b=\sqrt{16}$ **b=4**

Para conocer el valor de **“c”,** se aplica el Teorema de Pitágoras:

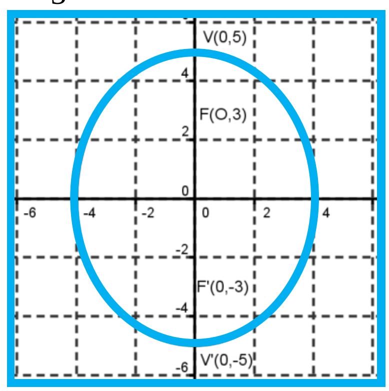
$a^2=b^2+c^2$

$c=\sqrt{a^2-b^2}$ $c=\sqrt{25-16}$ $c=\sqrt{9}$ $=3$

C(0, 0) C(0, 0)
F(0, c) F(0, 3)
F´(0, -c) F´(0, -3)
V(0, a) V(0, 5)
V´(0, -a) V´(0, -5)

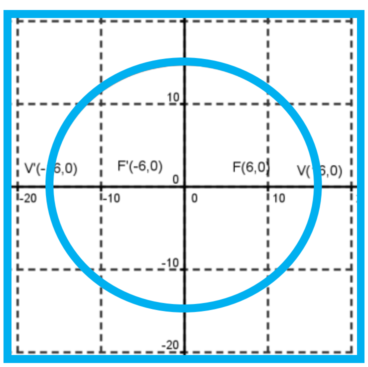
$LLR=\frac{2b^2}{a}$ = $\frac{2(16)}{5}$ = $\frac{32}{5}$ 6.4

$e=\frac{3}{5}$ = 0.6



Ejemplo 3.

Hallar la ecuación ordinaria de la elipse, si se sabe que su C(0, 0), su F(6, 0) y su V(16, 0).



Después de graficar los datos se deduce que su ecuación es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Por lo que debemos conocer el valor de **“a”** y de **“b”**:

Para conocerlos sabemos que:
F’(c, 0) F(6, 0) por lo que **c = 6**
V’(a, 0) V(16, 0) por lo que **a =16**

Para encontrar **“b”** sabemos que:

$a^2= b^2+c^2$
$b=\sqrt{a^2-c^2}$
$b=\sqrt{16^2-6^2}$
$b=\sqrt{16^2-6^2}$
$b=\sqrt{256-36}$
$b=\sqrt{220}$
$b^2= 220$

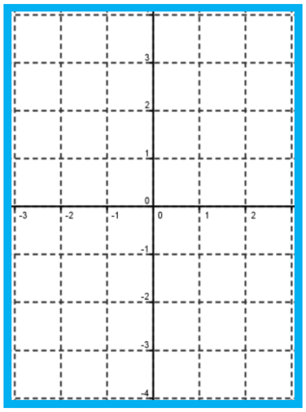
Por lo tanto su ecuación es:

$$\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{220}=1$$

Ejercicios para resolver en clase.

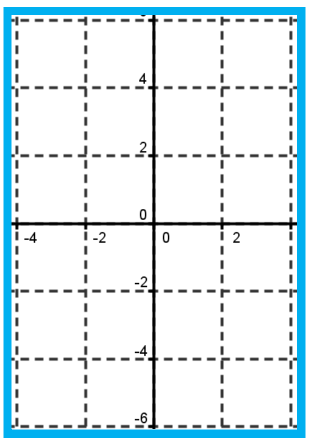
Ejercicio 1.

Hallar las coordenadas de los vértices, focos, la longitud de cada lado recto, el valor de la excentricidad y la gráfica de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1.$



Ejercicio 2.

Hallar las coordenadas de los vértices, focos, la longitud de cada lado recto, el valor de la excentricidad y la gráfica de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1.$



Ejercicio 3.

Hallar las coordenadas de los vértices, focos, la longitud de cada lado recto, el valor de la excentricidad y la gráfica de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1.$