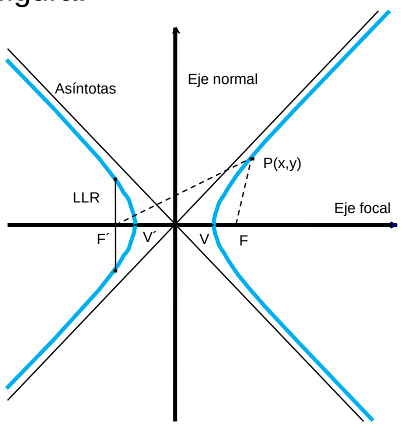
3.2 La Hipérbola.

3.2.1 La Hipérbola como lugar geométrico.

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es una constante. Los puntos fijos se denominan focos de la hipérbola y la constante es la distancia que existe entre vértice y vértice, como se muestra en la siguiente figura.



Longitud del lado recto. En la hipérbola, al igual que en la elipse, tiene dos focos; por lo tanto, tiene dos lados rectos y su fórmula es: $LLR=\frac{2b^2}{a}$

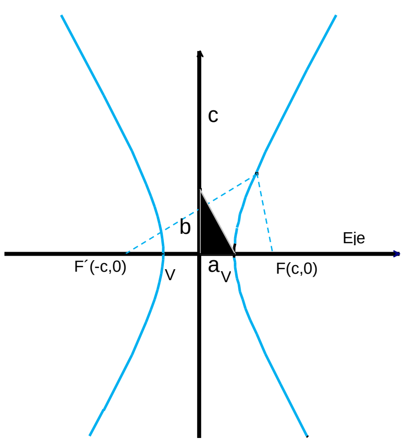
Asíntotas.

Para una curva dada existe una recta que a medida que un punto de ella se aleja del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece, es decir; tiende a cero, a dicha recta se le denomina asíntota. Estas rectas se cruzan en el centro de la hipérbola. La ecuación de estas rectas es:

$y=\pm\frac{b}{a}x$ **Si la hipérbola es horizontal.** $y=\pm\frac{a}{b}x$ **Si la hipérbola es vertical.**

3.2.2 Ecuación ordinaria de la hipérbola con su centro en el origen.

Partimos de la definición de hipérbola, la cual es el lugar geométrico de todos los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es una constante, de acuerdo a la siguiente figura.



$\left|\bar{d}PF - \bar{d}PF'\right|$ **=2a**

$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}$ **-** $\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$ **= 2a**

Despejamos la primera raíz.

$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$ **=2a +** $\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$ elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad.

(x**+c)^2+ y^2 = 4a^2+4a** $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ **+ (x-c)^2+y^2** eliminando términos semejantes y agrupando.

(x+c)^2+y^2 = 4a^2+ 4a $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ **+(x-c)^2+ y^2**

x^2+2xc+c^2 = 4a^2+4a $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ **+x^2-2xc+c^2**

x^2+2xc+c^2 – x^2+2xc-c^2= 4a^2+4a $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ eliminando términos semejantes.

4xc=4a^2+4a $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ dejamos solita al término que contiene a la raíz

4xc=+4a^2+4a $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ dividiendo entre 4.

Aplicando inverso aditivo

xc-a^2= + a $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad.

(xc-a^2)^2= $\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$ desarrollamos el binomio cuadrado.

a^4-2 xca^2+x^{2}c^2 = a^2((x-c)^2+y^2)
a^4-2 xca^2+x^{2}c^2 = a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)
a^4-2 a^2 xc+x^{2}c^2 = a^{2}x^2-2a^{2}xc+a^{2}c^2+a^{2}y^2
+x^{2}c^2 - a^{2}x^2-a^{2}y^2= +a^{2}c^2- a^4 factorizando con respecto a **"x"** y **"a"**
x^2(c^2-a^2)- a^{2}y^2=a^2(c^2-a^2)

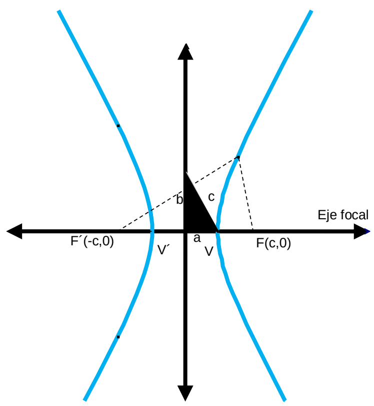
si **c^2= a^2+b^2** entonces **b^2= c^2 -a^2** y sustituyéndola tenemos:

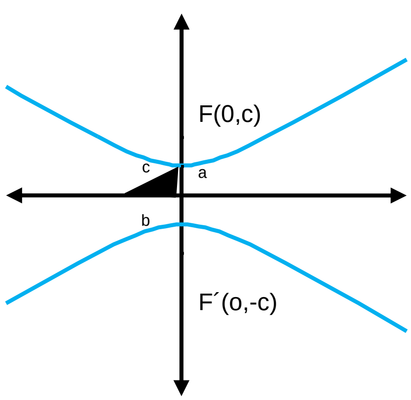
x^2(b^2) - a^{2}y^2 =a^2 (b^2) dividiéndola entre **a^2 b^2**

$\frac{x^2b^2}{a^2b^2}-\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$ nos queda:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

La siguiente tabla muestra algunos puntos importantes de la hipérbola, así como su ecuación ordinaria.

<table>
<tr><th>Figura.</th><th>Ecuación.</th><th>Fórmulas.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$c^2=a^2+b^2$</td><td>C(0, 0)
F(c, 0)
F´(-c, 0)
V(a, 0)
V´(-a, 0)
LLR= $\frac{2b^2}{a}$
e= $\frac{c}{a}$ e>1
$y=\pm\frac{b}{a}x$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$c^2=a^2+b^2$</td><td>C(0, 0)
F(0, c)
F´(0, -c)
V(0, a)
V´(0, -a)
LLR= $\frac{2b^2}{a}$
e= $\frac{c}{a}$ e>1
$y=\pm\frac{a}{b}x$</td></tr>
</table>

3.2.3 Ecuación general de la hipérbola.

Toda ecuación de una hipérbola se puede representar en su forma general, la cual es:

$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Donde **$A>0$** y **$C<0$**, esta ecuación se obtiene al multiplicar toda la ecuación por el producto de sus cocientes, desarrollar los binomios al cuadrado e igualar a cero.

También a partir de la ecuación general de la hipérbola podemos encontrar la ecuación ordinaria, esto se logra completando trinomios cuadrados perfectos (TCP).

Ejemplo 1. Encontrar el centro, los vértices, los focos, la LLR, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

La ecuación $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ es de la forma:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ por lo que:

$a^2=4$ a= $\sqrt{4}$ a=2

$b^2=9$ b= $\sqrt{9}$ b=3

También sabemos que:
$c^2=a^2+b^2$
$c^2=4+9$

c= $\sqrt{13}$ c=3.6

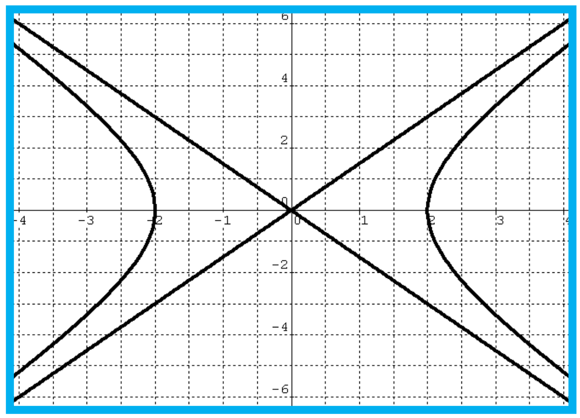
Con los valores de a, b y c determinamos sus elementos:

C(0,0) C(0,0)
F(c,0) F(3.6,0)
F´(-c,0) F´(-3.6,0)
V(a,0) V(2,0)
V´(-a,0) V´(-2,0)

LLR = $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{2}=\frac{18}{2}$=9

e= $\frac{c}{a}=\frac{3.6}{2}$ = 1.8

$y=+\frac{3}{2}x$ $y=-\frac{3}{2}x$



Ejemplo 2. Encontrar el centro, los vértices, los focos, la LLR, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es $9x^2-25y^2+225=0$

Primero la pasamos a su forma ordinaria.
$9x^2-25y^2+225=0$ ordenamos términos.

$9x^2-25y^2=-225$ dividimos entre -225

$\frac{9x^2}{-225}-\frac{25y^2}{-225}=\frac{-225}{-225}$

$\frac{-x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ Ordenando términos.

$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$

$a^2=9$ a= $\sqrt{9}$ a=3

$b^2=25$ b= $\sqrt{25}$ b=5

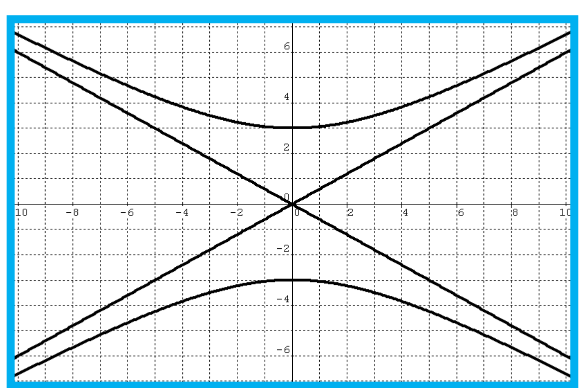
También sabemos que:
$c^2=a^2+b^2$

$c^2=9+25$ c= $\sqrt{34}$ c=5.83
Con los valores de a, b y c determinamos sus elementos.

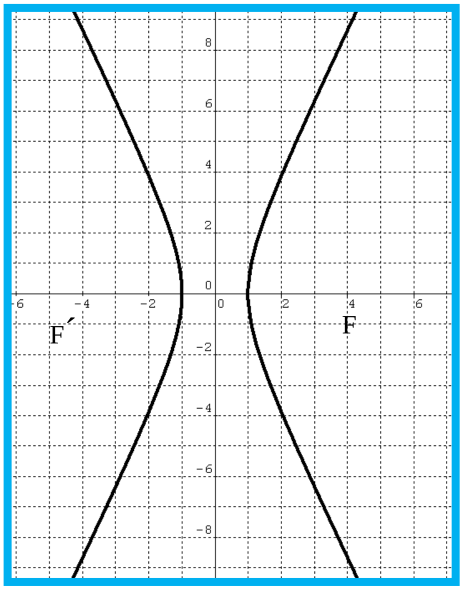
C(0,0) C(0,0)
F(0,c) F(0, 5.83)
F´(0,-c) F´(0, -5.83)
V(0,a) V(0, 3)
V´(0,-a) V´(0,-3)

LLR= $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(25)}{3}=\frac{50}{3}$ =16.6

e= $\frac{c}{a}$ e= $\frac{5.83}{3}$ = 1.94 $y=-\frac{3}{5}x$ $y=+\frac{3}{5}x$



Ejemplo 3. Hallar la ecuación ordinaria y general de la hipérbola que se muestra en la siguiente figura.



Como el centro de la hipérbola está en el origen del sistema coordenado tenemos que su ecuación deberá tener la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

F(c,0) F(4,0) por lo que c=4

V(a,0) V(1,0) por lo que a=1

Como ya conocemos el valor de **a** y **c** y la ecuación está en función de **a** y **b** deberemos de determinar el valor de "b", sabemos también que:

$c^2 = a^2 + b^2$ por lo que:

$b^2 = c^2 - a^2$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$b = \sqrt{4^2 - 1^2}$$
$$b = \sqrt{16 - 1}$$
$$b = \sqrt{15}$$ b=3.87

Por lo tanto su ecuación será:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{15} = 1$$

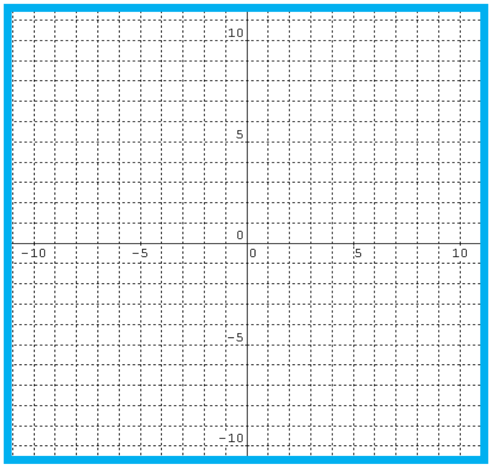
y en su forma general seria:

$$\frac{15x^2}{1} - \frac{15y^2}{15} = 1(15)$$

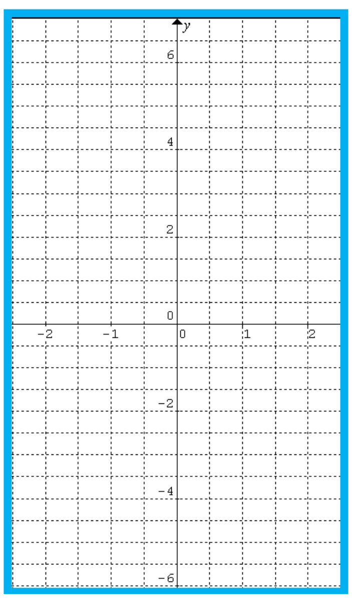
$15x^2 - y^2 - 15 = 0$

Ejercicios para resolver en clase.

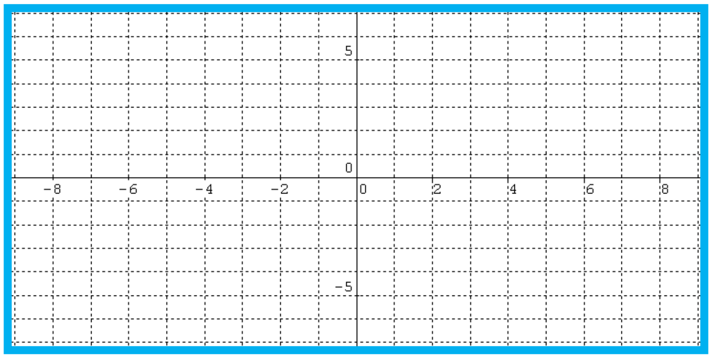
Ejercicio 1. Encontrar el centro, los vértices, los focos, la LLR, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$



Ejercicio 2. Encontrar el centro, los vértices, los focos, la LLR, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es: $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1$



Ejercicio 3. Encontrar el centro, los vértices, los focos, la LLR, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es: $\mathbf{x^2-3y^2-12=0}$



Ejercicios como tarea de evaluación.

1. Encontrar el centro, los vértices, los focos, la LLR, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$