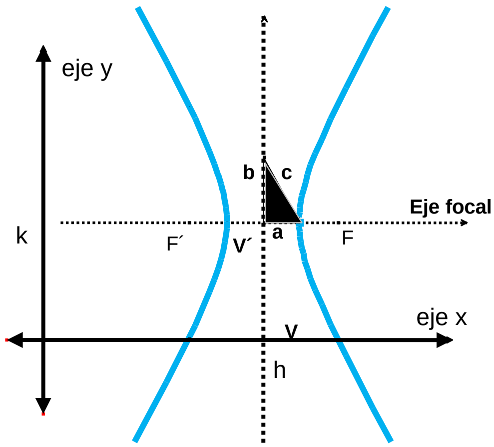
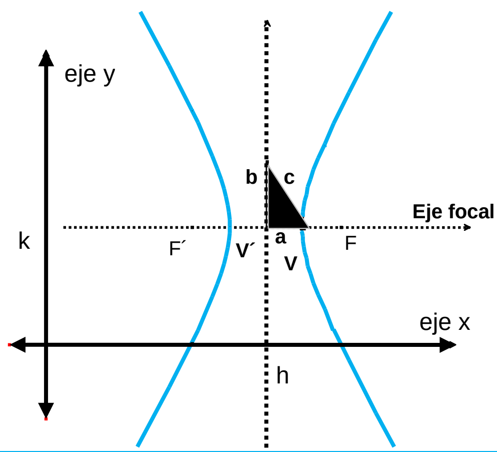
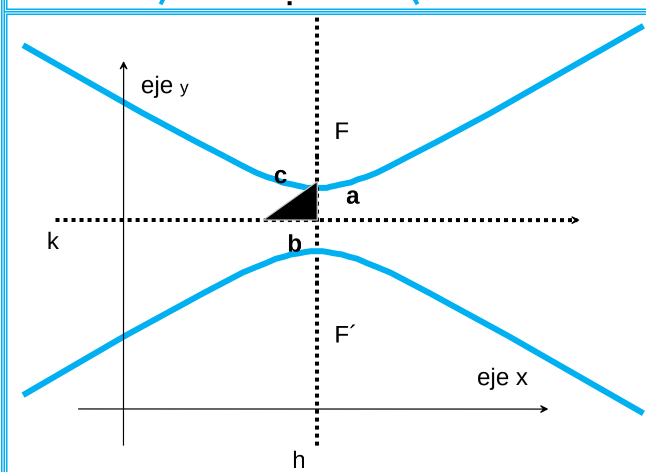
3.2.4 Ecuación ordinaria de la hipérbola con su centro fuera del origen.

Si el centro de la hipérbola esta fuera del origen del sistema coordenado, entonces tendrá como centro C(h, k) como se muestra en la siguiente figura.



Por lo que la ecuación y las fórmulas para determinar sus vértices, focos, LLR y la excentricidad serán:

<table>
<tr><th>Figura.</th><th>Ecuación.</th><th>Fórmulas.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$c^2=a^2+b^2$
$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$</td><td>C(h, k)
F(h+c, k)
F´(h-c, k)
V(h+a, k)
V´(h-a, k)
LLR= $\frac{2b^2}{a}$
e= $\frac{c}{a}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
$c^2= a^2+b^2$
$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$</td><td>C(h, k)
F(h, k+c)
F´(h, k-c)
V(h, k+a)
V´(h, k-a)
LLR= $\frac{2b^2}{a}$
e= $\frac{c}{a}$</td></tr>
</table>

Ejemplo 1. Encontrar el centro, los vértices, los focos, la LLR, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es: $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$

La ecuación $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$ es de la forma:

$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ por lo que:

$a^2=4$ a= $\sqrt{4}$ a=2
$b^2=9$ b= $\sqrt{9}$ b=3
-h=+2 h=-2
-k=+1 k=-1

También sabemos que:
$c^2=a^2+b^2$
$c^2=4+9$
c= $\sqrt{13}$ c=3.6

con los valores de a, b y c determinamos sus elementos.

C(h, k) C(-2, -1)
F(h+c, k) F(-2+3.6, -1) F(1.6, -1)
F´(h-c, k) F´(-2-3.6, -1) F´(-5.6,-1)
V(h+a, k) V(-2+2, -1) V(0, -1)
V´(h-a, k) V´(-2-2, -1) V´(-4,-1)

LLR= $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{2}$ =9

e= $\frac{c}{a}=\frac{3.6}{2}$ =1.8

$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$

$y-(-1)=+\frac{3}{2}(x-(-2))$

$y+1=+\frac{3}{2}(x+2)$

$y+1=+\frac{3}{2}x+3$

$y=+\frac{3}{2}x+3-1$

$y=+\frac{3}{2}x+2$ **Asíntota 1.**

$y-k=-\frac{b}{a}(x-h)$

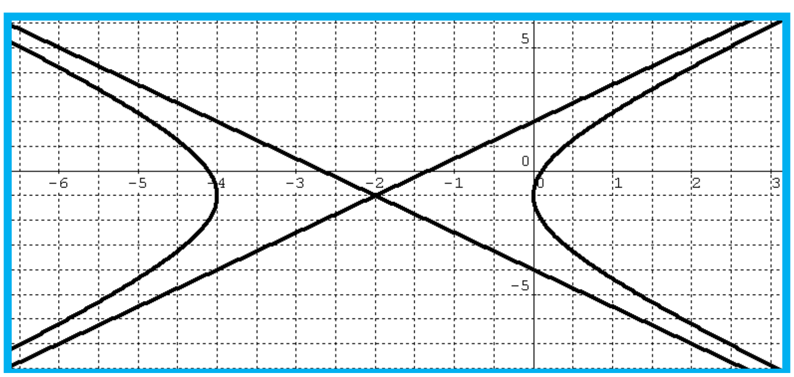
$y-(-1)=-\frac{3}{2}(x-(-2))$

$y+1=-\frac{3}{2}(x+2)$

$y+1=-\frac{3}{2}x-3$

$y=-\frac{3}{2}x-3-1$

$y=-\frac{3}{2}x-4$ **Asíntota 2.**



Ejemplo 2. Encontrar el centro, los vértices, los focos, la LLR, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es:
$16y^2-9x^2+54x-32y-209=0$

Primero la pasamos a su forma ordinaria $16y^2-9x^2+54x-32y-209=0$ agrupando términos

$16y^2-32y -9x^2+54x= +209$
$16(y^2-2y+ \quad) -9 (x^2-6x+ \quad)=209$
$16(y^2 -2y+ 1) -9 (x^2 -6x+ 9)=209$ Para completar el TCP. En el espacio en blanco debemos de anotar un número que multiplicado por 2 nos dé el segundo término del trinomio, este número deberá de anotarse elevado al cuadrado.

$16(y^2-2y+ 1) -9 (x^2-6x+ 9)=209+16-81$
Se debe sumar 16 y 81 ya que es el resultado del número que agregamos, multiplicado por el factor que antecede al trinomio.

Factorizando al trinomio.

$16(y-1)^2-9(x-3)^2= 144$

Dividimos entre 144

$$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{16}=1$$

La ecuación $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{16}=1$ es de la forma:

$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ por lo que:

$a^2=9$ $a=\sqrt{9}$ $a=3$

$b^2=16$ $b=\sqrt{16}$ $b=4$
$-h=-3$ $h=3$
$-k=-1$ $k=1$

También sabemos que:
$c^2=a^2+b^2$
$c^2=9+16$
$c=\sqrt{25}$ $c=5$

con los valores de a, b y c determinamos sus elementos

C(h, k) C(3,1)
F(h, k+c) F(3, 1+5) F(3,6)
F´(h, k-c) F´(3,1-5) F´(3, -4)
V(h, k+a) V(3,1+3) V(3,4)
V´(h, k-a) V´(3, 1-3) V´(3,-2)

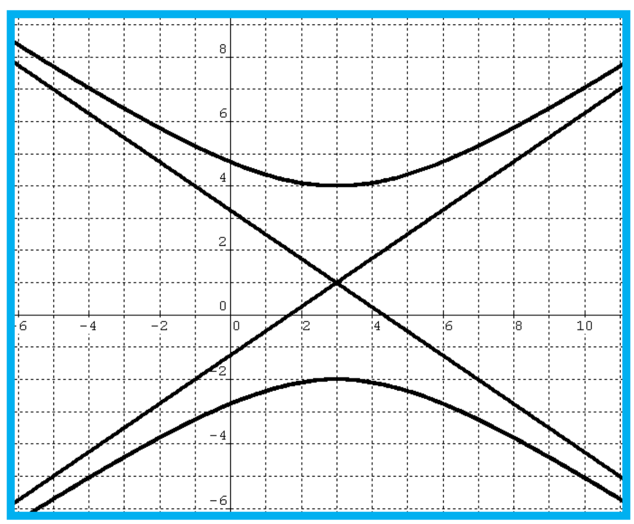
$LLR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(16)}{3}=\frac{32}{3}= 10.6$

$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}=1.66$

$$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$$

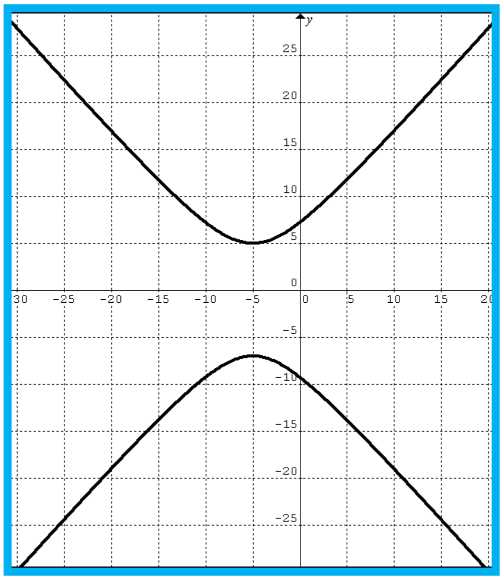
$y-1=+3/4(x-3)$
$y=3/4x-9/4 +1$
$y=3/4x-5/4$ Asíntota 1

$y-1=-3/4(x-3)$
$y-1=-3/4x+9/4$
$y=-3/4x+9/4+1$
$y=-3/4x+13/4$ Asíntota 2



Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la hipérbola en su forma ordinaria cuyo **C(-5,-1), V(-5,-5) y e=** $\frac{4}{3}$

Si graficamos los datos sabremos que se trata de una hipérbola con eje focal paralelo al eje de las ordenadas.



Sabemos que "a" es la distancia del centro al vértice, por lo tanto a=6

Del centro C(-5,-1) sabemos que:
h=-5
k=-1

Se conoce que a=6, e= $\frac{4}{3}$ pero

e= $\frac{c}{a}$

$\frac{4}{3} = \frac{c}{6}$ por lo que

c= $\frac{(6)(4)}{3}$ c= $\frac{24}{3}$ c=8

también sabemos que $c^2=a^2+b^2$

$b^2= c^2-a^2$
$b^2= 8^2-6^2$
$b^2= 64-36$
$b^2= 28$

por lo que su ecuación es

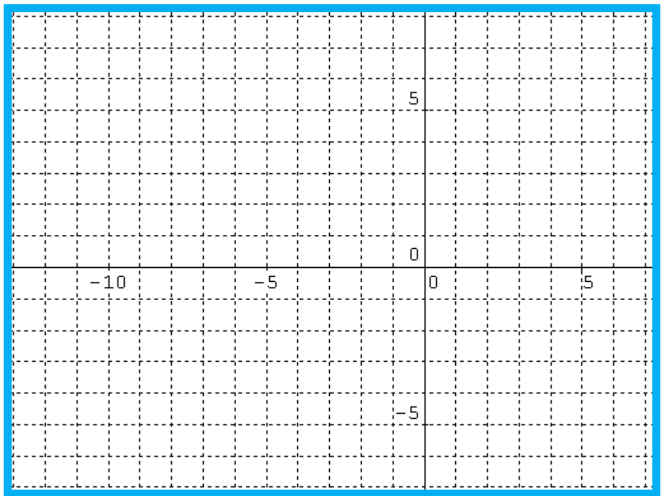
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y-(-1))^2}{6^2} - \frac{(x-(-5))^2}{28} = 1$$

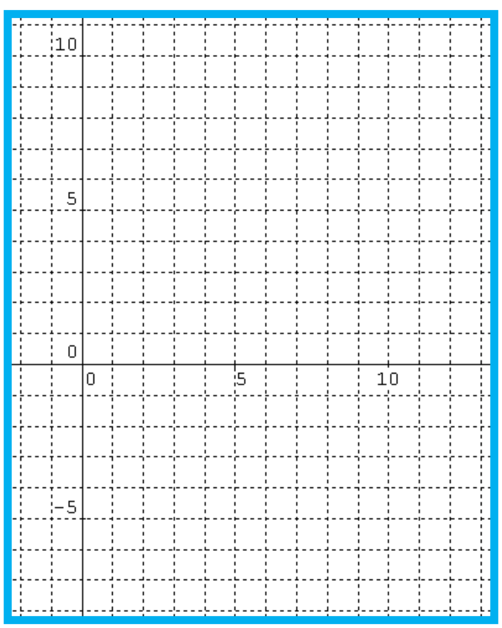
$$\frac{(y+1)^2}{36} - \frac{(x+5)^2}{28} = 1$$

Ejercicios para resolver en clase.

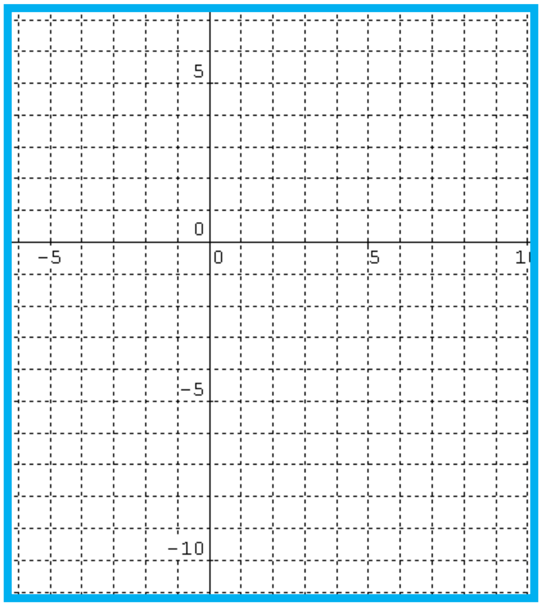
Ejercicio 1. Encontrar el centro, los vértices, los focos, la LLR, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es: $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{25} = 1$



Ejercicio 2. Encontrar el centro, los vértices, los focos, la LLR, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es: $\frac{(x-6)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$



Ejercicio 3. Encontrar la ecuación de la hipérbola en su forma ordinaria si se conoce que: **V(3,-2), F´(5,-2) y F(-1,-2).**



Ejercicio 4. Encontrar la ecuación de la hipérbola en su forma ordinaria si se conoce que: **V(-3,0)**, **F´(-3,3)** y **F(-3,-5)**.