

## 2.2 La parábola

### 2.2.1 La parábola como lugar geométrico.

La parábola es el lugar geométrico que se forma con todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz, como se muestra en la siguiente figura.

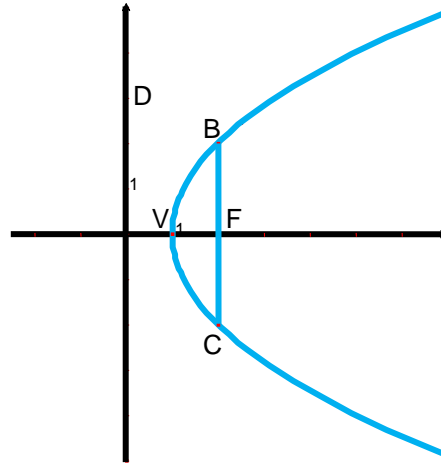
#### Elementos de la parábola:

V= Vértice.

F= Foco.

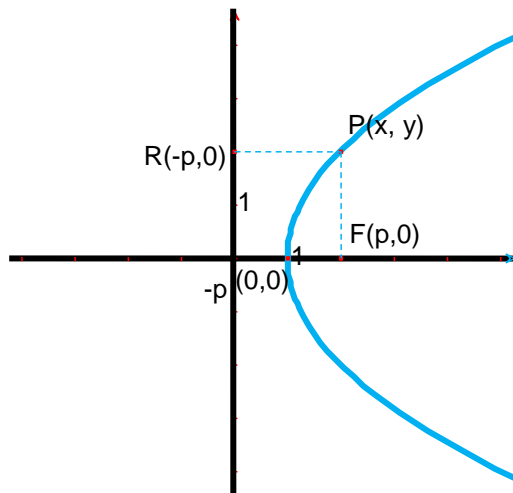
$\overline{BC}$  = Longitud del lado recto (LLR).

D = Recta fija llamada directriz.



### 2.2.2 Ecuación ordinaria de la parábola con su vértice en el origen.

Para que un punto forme parte de una parábola, se debe cumplir que se encuentre a la misma distancia de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz.



$\overline{dRP} = \overline{dPF}$  Usando la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  sustituyendo las coordenadas y elevando al cuadrado.

$$(\sqrt{(x - (-p))^2 + (y - 0)^2})^2 = (\sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2})^2$$

$$(x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2 + y^2$$

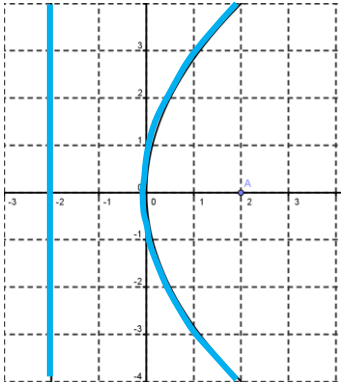
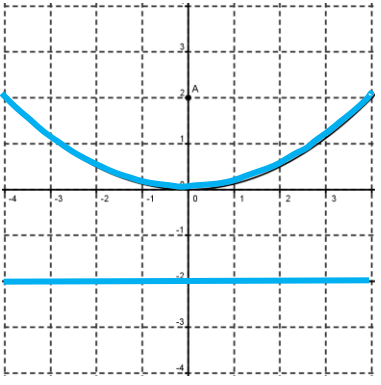
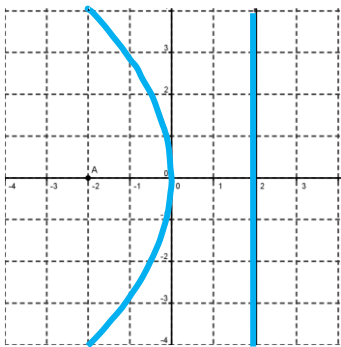
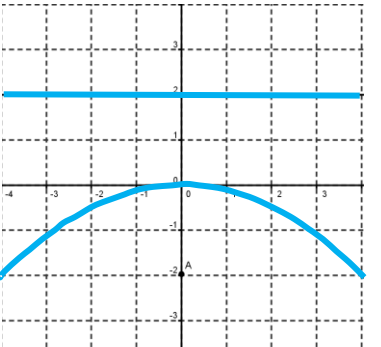
$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$  Ordenando términos tenemos:

$x^2 + 2px + p^2 - x^2 + 2px - p^2 = +y^2$  agrupando términos semejantes.

$$4px = y^2$$

$$y^2 = 4px$$

La siguiente tabla muestra algunos puntos importantes de la parábola así como su ecuación.

	<p><math>y^2 = 4px</math>  <math>V(0,0)</math>  <math>F(p,0)</math>  <math>LLR =  4p </math>                      Directriz <math>x = -p</math></p>		<p><math>x^2 = 4py</math>  <math>V(0,0)</math>  <math>F(0,p)</math>  <math>LLR =  4p </math>                      Directriz <math>y = -p</math></p>
	<p><math>y^2 = -4px</math>  <math>V(0,0)</math>  <math>F(-p,0)</math>  <math>LLR =  4p </math>                      Directriz <math>x = p</math></p>		<p><math>x^2 = -4py</math>  <math>V(0,0)</math>  <math>F(0,-p)</math>  <math>LLR =  4p </math>                      Directriz <math>y = p</math></p>

## Ejemplos resueltos.

### Ejemplo 1.

Dada la ecuación de la parábola  $y^2 = -20x$ , encontrar las coordenadas del vértice, foco, la longitud del lado recto, la ecuación de la directriz y graficar.

De la ecuación:

$y^2 = -20x$  la comparamos con:

$y^2 = -4px$  obtenemos que:

$$-20 = -4p$$

$$p = \frac{-20}{-4}$$

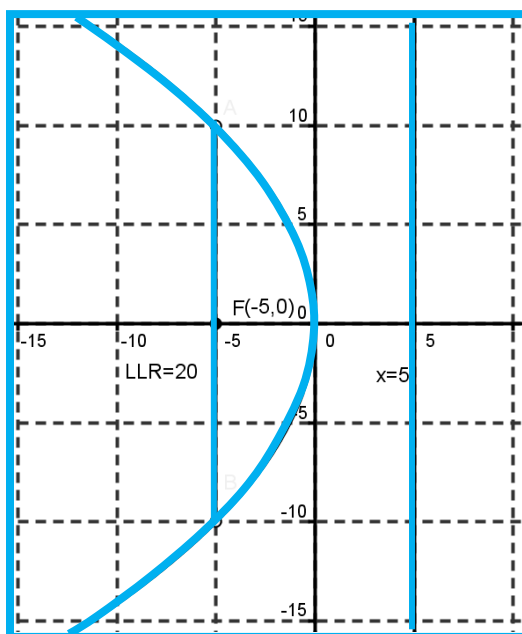
$$p = 5$$

$$V(0, 0)$$

$$F(-p, 0) = (-5, 0)$$

$$LLR = |4p| = |4(5)| = |20| = 20$$

$$\text{Directriz } x = p \quad x = 5$$



### Ejemplo 2.

Dada la ecuación de la parábola  $x^2 = 8y$ , encontrar las coordenadas del vértice, foco, la longitud del lado recto, la ecuación de la directriz y graficar.

De la ecuación  $x^2 = 8y$  la comparamos con:

$x^2 = 4py$  obtenemos que:

$$8 = 4p$$

$$p = \frac{8}{4}$$

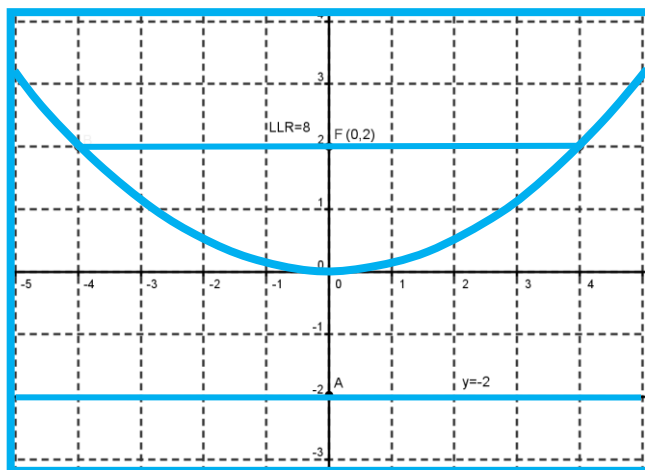
$$p = 2$$

$$V(0,0)$$

$$F(0, p) = (0, 2)$$

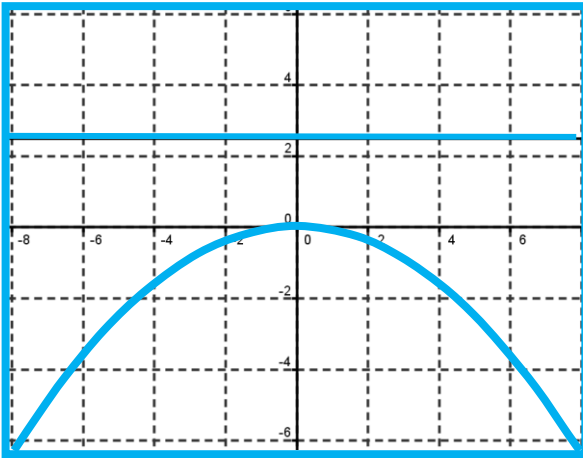
$$LLR = |4(2)| = 8$$

$$\text{Directriz } y = -p \quad y = -2$$



### Ejemplo 3.

Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje focal sobre el eje de las ordenadas, se abre hacia abajo y su LLR= 10.



Si la LLR= $|4p|$ , entonces  $|4p|=10$  despejamos  $p$ :

$$p = \frac{10}{4} = 2.5$$

Por lo que la ecuación será:

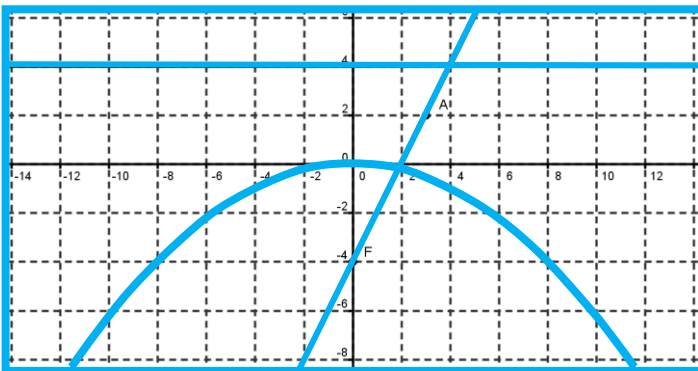
$$x^2 = -4py$$

$$x^2 = -4(2.5)y$$

$$x^2 = -10y$$

### Ejemplo 4.

Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, cuyo foco coincide con el punto donde la recta que pasa por el punto  $A(3, 2)$  y cuya pendiente  $m=2$  cruza el eje "y".



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 2(x - 3)$$

$$y - 2 = 2x - 6$$

$$y = 2x - 6 + 2$$

$$y = 2x - 4$$

Ecuación ordinaria de la recta, la cual nos sirve para conocer el punto donde la recta corta al eje **y**, dicho punto es el valor de **p**, del foco de la parábola.

$$b = -4 = p$$

$$x^2 = -4py$$

$$x^2 = -4(4)y$$

$$x^2 = -16y$$

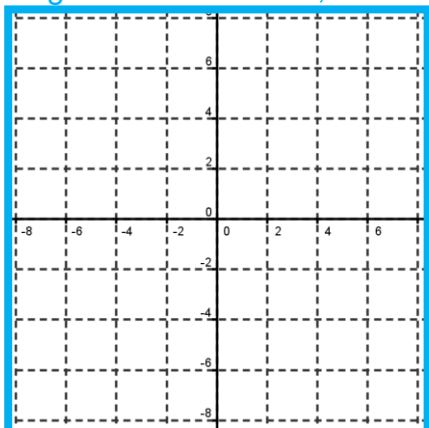
### Solución.

Tenemos el punto **A** y la pendiente de la recta ( $m$ ), podemos encontrar su ecuación ordinaria y así saber cuál es el punto de corte con el eje "y" (valor de  $p$ ).

## Ejercicios para resolver en clase.

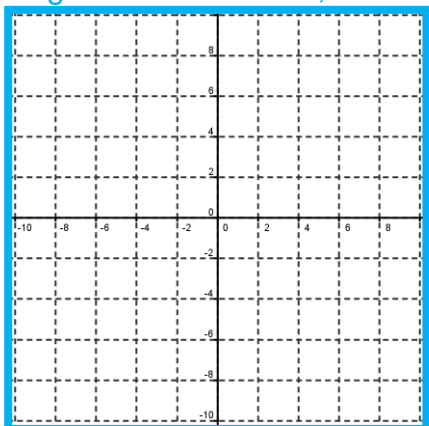
### Ejercicio 1.

Dada la ecuación de la parábola  $y^2 = 12x$ , encontrar las coordenadas del vértice, foco, la longitud del lado recto, la ecuación de la directriz y graficar.



### Ejercicio 2.

Dada la ecuación de la parábola  $y^2 = -16x$ , encontrar las coordenadas del vértice, foco, la longitud del lado recto, la ecuación de la directriz y graficar.



### Ejercicio 3.

Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco  $F(-2, 0)$ . Graficar.

