1.8. POTENCIAS Y RADICALES.

La potencia es una expresión matemática que comprende dos partes: la base y el exponente.

b^n= (b)(b)(b)(b)...Donde ***b*** es la base y ***n*** el exponente.

Para encontrar el resultado de la potencia, la base se multiplica por sí misma el número de veces que indica el exponente.

Cuando una base no tiene indicado el exponente, se entiende que este es 1.
Cuando la base es positiva y el exponente es par o impar, la potencia es positiva.
Cuando la base es negativa y el exponente es par, la potencia es positiva.
Cuando la base es negativa y el exponente impar, la potencia es negativa.

Ejercicios: Con base en la información anterior, completa la siguiente tabla.

No.	Potencia.	Base.	Exponente.	Desarrollo.	Resultado.
1	3^4	3	4	(3) (3) (3) (3)	81
2	4^2			(4)(4)	16
3	5^3				
4	6^5				
5	4^0	4	0		1
6	$(-3)^4$				
7	$(-5)^3$	-5	3	(-5)(-5)(-5)	-125
8	$(-2)^5$				
9	$(-7)^2$				
10	$(-8)^1$			-8	-8

1.8.1. PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES.

Cuando se efectúan operaciones de multiplicación, división y radicales con términos algebraicos, gran parte de las operaciones se pueden reducir aplicando las propiedades de los exponentes que a continuación se indican:

Producto de potencias de la misma base.

El resultado es una potencia con la misma base y como exponente la suma de los exponentes de las potencias que se multiplican.

$$(b^m)(b^n)=b^{m+n}$$

División de potencias de la misma base.

El resultado es una potencia con la misma base y como exponente la diferencia de los exponentes del numerador y el denominador.

$$\frac{b^m}{b^n}=b^{m-n}$$

Potencia con exponente cero.

Esta potencia es el resultado de aplicar la división de dos potencias de la misma base y del mismo exponente; aquí el resultado es la misma base con exponente cero, lo que a su vez equivale a la unidad.

Si m=n entonces

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n} = b^0 = 1$$

Potencia con exponente negativo.

Esta potencia es obtenida cuando se dividen dos potencias de la misma base, en donde el exponente de la potencia del numerador es menor que el exponente de la potencia del denominador. Una potencia con exponente negativo representa una fracción.

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

Potencia de potencias.

Es la operación en donde una potencia está elevada a otro exponente, de manera que la primera potencia es la base de la segunda potencia.

$$(b^n)^m = b^{(n)(m)}$$

Producto de potencias de diferente base pero de igual exponente.

El resultado es el producto de las bases, elevado al exponente común.

$$(b*a)^n = (b^n)(a^n)$$

División de potencias de diferente base con igual exponente.

El resultado es el cociente de las bases, elevado al exponente común.

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

Representación de una raíz en forma de potencia.

La potencia de esta expresión tiene la base de la potencia del radicando con un exponente racional, cuyo numerador es el exponente de dicha potencia y el denominador, el índice del radical.

$$\sqrt[m]{b^n} = (b)^{\frac{n}{m}}$$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON POTENCIAS.

Ejemplos resueltos.
Resolver las siguientes potencias aplicando las propiedades de los exponentes:

1) $(x^2)(x^3)=x^{3+2}=x^5$

2) $(m^2)(m^4)=m^{2+4}=m^6$

3) $(3m)(5m^2)=15m^{1+2}=15m^3$

4) $(4xz^3)(8x^4z^2)=32x^{1+4}z^{3+2}=32x^5z^5$

5) $(7m^3n^2x)(-6m^{-2}x^4)=-42m^{3-2}n^2x^{1+4}=-42mn^2x^5$

6) $\dfrac{x^4}{x^2}=x^{4-2}=x^2$

7) $\dfrac{3^4}{3^2}=3^{4-2}=3^2=9$

8) $\dfrac{m^5}{m^3}=m^{5-3}=m^2$

9) $\dfrac{8m^4}{2m}=4m^{4-1}=4m^3$

10) $\dfrac{3m^3n^5}{4m^2n^2}=\dfrac{3}{4}m^{3-2}n^{5-2}=\dfrac{3}{4}mn^3$

11) $\dfrac{12x^3y^4}{4x^{-2}y^2}=3x^{3-(-2)}y^{4-2}=3x^{3+2}y^2=3x^5y^2$

12) $\dfrac{x^4}{x^4}=x^{4-4}=x^0=1$

13) $\dfrac{8m^5}{2m^5}=4m^{5-5}=4m^0=4(1)=4$

14) $5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{(5)(5)}=\dfrac{1}{25}$

15) $8^{-3}=\dfrac{1}{8^3}=\dfrac{1}{(8)(8)(8)}=\dfrac{1}{512}$

16) $x^{-4}=\dfrac{1}{x^4}$

17) $x^{-4}y^{-3}=\left(\dfrac{1}{x^4}\right)\left(\dfrac{1}{y^3}\right)$

18) $2^{-3}3^{-2}=\left(\dfrac{1}{2^3}\right)\left(\dfrac{1}{3^2}\right)=\left(\dfrac{1}{8}\right)\left(\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{1}{72}$

19) $(x^2)^3=x^{2x3}=x^6$

20) $(x^2y^3)^4=x^{2x4}y^{3x4}=x^8y^{12}$

21) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3=\dfrac{x^3}{y^3}$

22) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{2^3}{5^3}=\dfrac{8}{125}$

23) $\sqrt[3]{x^1}=x^{\frac{1}{3}}$

24) $\sqrt{y^2}=y^{\frac{2}{2}}=y$

25) $\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{3}{4}}$

26) $\sqrt{(2*4)^3}=\sqrt{2^3}\sqrt{4^3}=\sqrt{8}\sqrt{64}=8\sqrt{8}$

Ejercicios para resolver en clase.

Resolver las siguientes potencias aplicando las propiedades de los exponentes:

1) $\left(z^{2}\right)\left(z^{4}\right)=$

2) $\left(2m^{3}\right)\left(m^{4}\right)=$

3) $\left(5x^{2}z^{2}\right)\left(-3x^{4}z^{-3}\right)=$

4) $\dfrac{y^{3}}{y^{2}}=$

5) $\dfrac{2^{5}}{2^{2}}=$

6) $\dfrac{12x^{4}}{6x^{2}}=$

7) $\dfrac{9x^{6}y^{5}}{3x^{-2}y^{2}}=$

8) $\dfrac{8z^{4}}{2z^{4}}=$

9) $(4^{-3})(5^{-2})=$

10) $\left(4^{2}y^{3}\right)^{2}=$

11) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3}=$

12) $\sqrt[3]{x^{2}}=$

13) $\dfrac{18x^{8}y^{3}}{3x^{-2}y^{2}}=$

14) $\dfrac{20x^{5}z^{4}}{4x^{3}z^{-4}}=$

15) $(6^{-3})(2^{-2})=$

16) $\left(6^{3}x^{3}y^{2}\right)^{2}=$

17) $\left(\dfrac{8x}{2y}\right)^{3}=$

18) $\sqrt[4]{(3x)^{2}}=$

Tarea de evaluación.

Resolver las siguientes potencias aplicando las propiedades de los exponentes:

1) $\left(4m^{3}\right)\left(6m^{2}\right)=$

2) $\left(7m^{4}n^{3}x\right)\left(-4m^{-2}nx^{3}\right)=$

3) $\dfrac{x^{7}}{x^{2}}=$

4) $\dfrac{-24x^{5}y^{6}}{4x^{-2}y^{2}}=$

5) $\dfrac{6m^{4}}{2m^{4}}=$

6) $(2^{-4})(4^{-3})=$

7) $\left(x^{6}y^{2}\right)^{3}=$

8) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4}=$

9) $\sqrt{x^{2}}=$

10) $x^{-\frac{2}{3}}=$

11) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^{3}}=$

12) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[2]{x^{3}}}=$

13) $\dfrac{2x^{3}}{x^{-\frac{2}{3}}}=$

14) $\sqrt{\sqrt[4]{x^{3}}}=$

15) $\sqrt[3]{(2x)(3y)}=$

1.8.2 Radicales.

La raíz n-ésima de un número dado **"a"**, es un número **"b"** que elevado al exponente **"n"** nos da **"a"**.

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

Si es una **raíz** e **irracional**, es un radical. Pero **no todas** las raíces son radicales.

Recordemos que los números irracionales son aquellos cuya expresión decimal no se repite nunca. Cuando no puedes simplificar un número para quitar una raíz cuadrada (o una raíz cúbica, etc.) entonces es un radical, como veremos a continuación:

Raíz.	Simplificación.	Decimal.	¿Radical o no?
$\sqrt{4}$	2	2	No es radical.
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1.732050	Si es radical.
$\sqrt[3]{8}$	2	2	No es radical.
$\sqrt[3]{9}$	$\sqrt[3]{9}$	2.08008382	Si es radical.

Un radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, en la que "n" es elemento de los números Naturales y "a" es un elemento de los números Reales; cuando "a" sea negativo, "n" ha de ser impar.

Los elementos de una radical son:

Índice

$$\boldsymbol{k\sqrt[n]{a}}$$

Coeficiente

Radicando

Un radical equivale a una potencia de exponente fraccionario, en la que el denominador de la fracción es el valor del índice del radical y el numerador de la fracción es el exponente del radicando. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Introducir o extraer un factor en un radical.

Para **introducir un factor** dentro de un radical se eleva el factor a la potencia que indica el índice del radical y se escribe dentro del mismo. Como se muestra a continuación.

1) $x\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^3x^2} = \sqrt[3]{x^5}$ **2)** $4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4^3 2} = \sqrt[3]{(64)2} = \sqrt[3]{128}$ **3)** $y^2\sqrt[3]{y^4} = \sqrt[3]{(y^2)^3 y^4} = \sqrt[3]{y^{10}}$

Para **extraer un factor** de un radical, éste deberá tener como exponente un número mayor que el índice, se puede extraer del radical dividiendo el exponente del radicando entre el índice. En esta división el cociente es el exponente del factor que saldrá del radical y el residuo es el exponente del factor que queda dentro. Como se muestra a continuación.

$\sqrt[3]{x^7} = x^2\sqrt[3]{x^1}$

$\sqrt[4]{5^{14}} = 5^3\sqrt[4]{5^2}$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 3 & 7 \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 4 & 14 \\ & 2 \end{array}$$

Radicales equivalentes.

Dos o más radicales son equivalentes si las fracciones de los exponentes de las potencias asociadas son equivalentes.

A partir de un radical se puede obtener infinitos radicales equivalentes, solo se tiene que multiplicar o dividir el exponente del radicando y el índice de la raíz por un mismo número, si se multiplica se le llama amplificar y si se divide se le llama simplificar el radical. Como se muestra a continuación.

$\sqrt[3]{z^4} = \sqrt[9]{z^{12}}$ son equivalentes porque $\frac{4}{3} = \frac{12}{9}$

$\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[6]{3^4}$ son equivalentes porque $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Para amplificar el radical $\sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3\times 2]{y^{2\times 2}} = \sqrt[6]{y^4}$

Para simplificar el radical $\sqrt[3]{y^9} = \sqrt[3\div 3]{y^{9\div 3}} = \sqrt[1]{y^3} = y^3$

Ejercicios para resolver en clase.

Escribe los siguientes radicales como potencia de exponente fraccionario:

1) $\sqrt[3]{5}$
2) $\sqrt{3}$
3) $\sqrt[3]{2^4}$
4) $\sqrt{4^3}$
5) $\sqrt{x^3}$
6) $\sqrt[6]{y^8}$
7) $\sqrt[4]{y^9}$
8) $\sqrt{xy^3}$
9) $\sqrt[5]{x^5}$
10) $\sqrt[4]{(xyz)^5}$

Escribe las siguientes potencias como radicales:

1) $3^{\frac{2}{3}}$
2) $2^{\frac{1}{2}}$
3) $4^{\frac{4}{2}}$
4) $y^{\frac{2}{5}}$
5) $x^{\frac{7}{5}}$
6) $y^{\frac{5}{5}}$
7) $z^{\frac{1}{4}}$
8) $(yz)^{\frac{1}{4}}$
9) $(y^4x^2)^{\frac{3}{2}}$
10) $(a^3)^{\frac{3}{2}}$

Introduce el factor dentro del radical.

1) $2\sqrt[3]{5}$
2) $4\sqrt[2]{4}$
3) $6\sqrt[4]{2^3}$
4) $5\sqrt[5]{4^3}$
5) $x\sqrt{x^3}$
6) $y^3\sqrt[6]{y^8}$
7) $y^2\sqrt[4]{y^9}$
8) $x^4\sqrt[2]{(xy)^3}$
9) $x^6\sqrt[5]{x^5}$
10) $x\,y^2\sqrt[4]{(xyz)^5}$

Extrae los factores del radical.

1) $\sqrt[3]{16}$
2) $\sqrt[3]{81}$
3) $\sqrt[4]{x^6}$
4) $\sqrt[5]{y^7}$
5) $\sqrt[6]{z^8}$
6) $\sqrt{243}$
7) $\sqrt{32x^6}$
8) $\sqrt[3]{256y^5}$
9) $\sqrt[5]{x^8y^7}$
10) $\sqrt[4]{x^4y^2z^8}$

Propiedades de los radicales.

Raíz de un producto.

La raíz n-ésima de un producto de factores es igual al producto de las raices n- ésimas de cada uno de los factores.

1) $\sqrt[n]{(a)(b)} = \left(\sqrt[n]{a}\right)\left(\sqrt[n]{b}\right)$
2) $\sqrt[3]{(x)(y^6)} = \left(\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{y^6}\right) = \sqrt[3]{x}y^2$

Raíz de un cociente.

La raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de la raíz n-ésima del dividendo y el divisor.

1) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

2) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

Raíz de una potencia.

La raíz de una potencia se obtiene primero calculando la raíz de la base y luego se eleva elresultado a la potencia dada.

1) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
2) $\sqrt[3]{(27)^2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$
3) $\sqrt{(16x^6)^3} = \left(\sqrt{(16x^6)}\right)^3 = \sqrt{16}\sqrt{x^6} = (4x^3)^3 = 64x^9$

Raíz de raíz.

La raíz n-ésima de la raíz m-ésima de un número es igual a la raíz (n)(m)-ésima de dicho número.

1) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[(n)(m)]{a}$
2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{45}} = \sqrt[(3)(4)]{45} = \sqrt[12]{45}$
3) $\sqrt[5]{\sqrt[2]{3}} = \sqrt[(5)(2)]{3} = \sqrt[10]{3}$
4) $\sqrt[3]{x^5\sqrt[4]{x^2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{20}x^2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{22}}} = \sqrt[12]{x^{22}}$

Ejercicios para resolver en clase.

Aplicando las propiedades de los radicales, resuelve los siguientes ejercicios.

1) $\sqrt[3]{27x}$
2) $\sqrt[4]{32x^6}$
3) $\sqrt[3]{\frac{256}{27}} =$
4) $\sqrt{\frac{16x^3}{4}} =$
5) $\sqrt[3]{(8)^2} =$
6) $\sqrt{(4x^4)^4} =$
7) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{4}} =$
8) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2x^3}} =$
9) $\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}} =$
10) $\sqrt{x^5\sqrt[3]{x}} =$